令４　中学校・高等学校数学（４枚のうち１）

（解答はすべて、解答用紙に記入すること）

Ⅰ　次の各問いに答えなさい。解答は、答えのみでよい。

⑴　**表**は、ある学校の生徒10人の英語と数学の小テストの結果をまとめ、人数を記したものである。ただし、各小テストは５点満点で、空欄は０人であることを表す。

　このとき、英語と数学の点数について述べたものとして正しいものを、次の**ア**～**エ**から１つ選んで、その符号を書きなさい。

ア　英語の点数の中央値と最頻値では中央値の方が大きい。

イ　数学の点数の中央値と平均値では平均値の方が大きい。

ウ　英語と数学の合計点の平均値は５点より大きい。

エ　英語の点数が３点未満である生徒の数学の点数の平均値は、英語の点数が３点以上である生徒の数学の点数の平均値より大きい。

表

英語（点）＼数学（点）	0	1	2	3	4	5
5					1	
4		2		1		
3		1	1			
2			1			
1	1	1				
0	1					

⑵　次の枠内は「２次関数 $y=x^2-2ax-a+6$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる２点で交わるように、定数 a の値の範囲を定めなさい。」という問題に対する、ある生徒の答案である。

> $f(x)=x^2-2ax-a+6$ とおくと、２次関数 $y=f(x)$ のグラフの軸は、直線 $x=a$ である。
> したがって、求める a の値の範囲は $a>0$ である。

　この答案は誤りであるが、条件をいくつか追加し共通範囲を求めることで、正しい a の値の範囲を定めることができる。追加しなければならない条件を、次の**ア**～**ク**からすべて選んで、その符号を書きなさい。

ア　$f(a)\geqq 0$　　**イ**　$f(a)\leqq 0$　　**ウ**　$f(a)>0$　　**エ**　$f(a)<0$

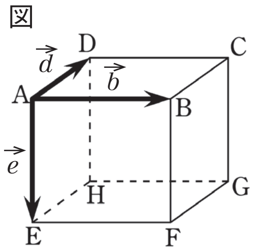
オ　$f(0)\geqq 0$　　**カ**　$f(0)\leqq 0$　　**キ**　$f(0)>0$　　**ク**　$f(0)<0$

⑶　放物線 $y=-x^2+8x-15$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

⑷　**図**のような立方体ABCD－EFGHにおいて、辺EFを２：１に内分する点Ｉとする。
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$、$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{b}$、$\vec{d}$、$\vec{e}$ を用いて表しなさい。

①　$\overrightarrow{BE}$　　　②　$\overrightarrow{DI}$

図



⑸　次の問いに答えなさい。

①　等比数列 $\dfrac{2}{3}$，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{8}$，…… の第 n 項 a_n を n の式で表しなさい。

②　無限等比級数 $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}-\cdots\cdots$ は収束する。その和を求めなさい。

⑹　曲線 $y=\log x$ 上の点（2, log2）における接線の方程式を求めなさい。

Ⅱ　１から９までの数字が１つずつ書かれた９枚のカードが１つの袋に入っている。１枚のカードを袋から取り出しカードに書かれている数字を確認し袋に戻す、という試行を３回繰り返すとき、１回目の試行で確認したカードの数字をＸ、２回目の試行で確認したカードの数字をＹ、３回目の試行で確認したカードの数字をＺとする。次の問いに答えなさい。

⑴　Ｘ＋Ｙ＋Ｚ＝3となる確率を求めなさい。解答は、答えのみでよい。

⑵　Ｘ＋Ｙ＋Ｚ＝4となる確率を求めなさい。解答は、答えのみでよい。

⑶　Ｘ＋Ｙ＋Ｚ＝21となる確率を求めなさい。

⑷　Ｘ＋Ｙ＋Ｚ＝12となる確率を求めなさい。

Ⅲ　AB＝2、BC＝$\sqrt{2}$、$\cos\angle ABC=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ である△ABCについて、次の問いに答えなさい。

⑴　辺CAの長さを求めなさい。解答は、答えのみでよい。

⑵　△ABCの外接円の半径 R を求めなさい。解答は、答えのみでよい。

⑶　△ABCの外接円の中心をＯとする。直線BOと△ABCの外接円の交点のうち、点Ｂと異なる点をＤとするとき、線分ADの長さを求めなさい。解答は、答えのみでよい。

⑷　⑶の点Ｄについて、直線CDと直線ABの交点をＥとする。

①　線分ECの長さを求めなさい。　　②　△ADEの面積 S を求めなさい。

Ⅳ　k は定数とする。放物線 $y=x^2+3x$ ……① と、直線 $y=kx-k^2$ ……② が異なる２点Ｐ、Ｑで交わっている。線分ＰＱの中点をＭとするとき、次の問いに答えなさい。

⑴　k の値の範囲を求めなさい。解答は、答えのみでよい。

⑵　点Ｍの座標を、k を用いて表しなさい。

⑶　k の値が⑴で求めた範囲で変化するとき、点Ｍの軌跡を求めなさい。

受験番号

令４　中学校・高等学校数学解答用紙（4 枚のうち 2）

総計		

数学

Ⅰ	(1)				
	(2)				
	(3)				
	(4)	①		②	
	(5)	①		②	
	(6)				
Ⅱ	(1)				
	(2)				
	(3)				
	(4)				

Ⅰ		

Ⅱ		

数学 3/4

受験番号

令４　中学校・高等学校数学解答用紙（４枚のうち３）

数学

Ⅲ	(1)		
	(2)		
	(3)		
	(4)	①	
		②	

Ⅲ		

数学 4/4
受験番号

令４　中学校・高等学校数学解答用紙（4 枚のうち 4）

数学

Ⅳ	(1)	
	(2)	
	(3)	

Ⅳ		

令４　中学校・高等学校数学　模範解答

総計　２００

Ⅰ

Ⅰ　６０

(1)	イ			
(2)	エ，キ			
(3)	$\frac{4}{3}$			
(4)	①	$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \vec{e} - \vec{b}$	②	$\overrightarrow{\mathrm{DI}} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{d} + \vec{e}$
(5)	①	$a_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$	②	$\frac{8}{21}$
(6)	$y = \frac{1}{2}x + \log 2 - 1$			

Ⅱ

Ⅱ　４０

(1) $\frac{1}{729}$

(2) $\frac{1}{243}$

(3)

Ｘ＋Ｙ＋Ｚ＝21 となる 3 つの数字(Ｘ，Ｙ，Ｚ)の組は

[1]　すべて異なる数字の場合
(9，8，4)，(9，7，5)，(8，7，6)
[2]　同じ数字が 2 つの場合
(9，9，3)，(8，8，5)，(9，6，6)
[3]　すべて同じ数字の場合
(7，7，7)

よって求める確率は

$$(3!\cdot 3 + {}_3C_1\cdot 3 + 1)\left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{28}{729}$$

(4)

1≦Ｘ≦9，1≦Ｙ≦9，1≦Ｚ≦9　だから　Ｘ－1＝Ｄ，Ｙ－1＝Ｅ，Ｚ－1＝Ｆ　とおくと

Ｘ＝Ｄ＋1，Ｙ＝Ｅ＋1，Ｚ＝Ｆ＋1　と　Ｘ＋Ｙ＋Ｚ＝12　より

Ｄ＋Ｅ＋Ｆ＝9　（ただし　0≦Ｄ≦8，0≦Ｅ≦8，0≦Ｆ≦8）

Ｄ＋Ｅ＋Ｆ＝9 となる数字の組合せは　9 個の○と 2 個の ｜ を並べる順列と一致する。

よって

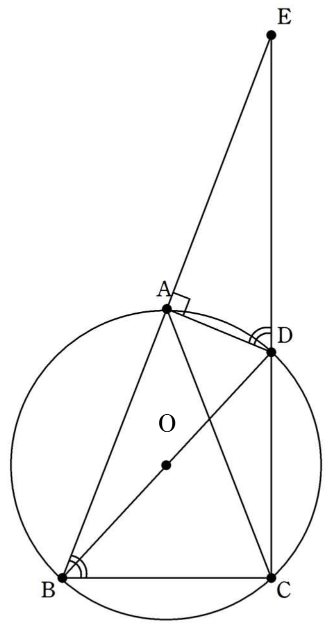
$$\frac{11!}{2!\,9!} = \frac{11\cdot 10}{2\cdot 1} = 55 \qquad \text{（通り）}$$

ただし　(Ｄ，Ｅ，Ｆ)=(0，0，9)，(0，9，0)，(9，0，0) は除く

したがって　求める確率は

$$(55-3)\left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{52}{729}$$

令４　中学校・高等学校数学　模範解答

Ⅲ	(1)	$\mathrm{CA}=2$	
	(2)	$R=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$	
	(3)	$\mathrm{AD}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$	
	(4)	①	右図より，BDは円の直径である。 よって　$\angle\mathrm{BCD}=90°$ $\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ $\tan\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sin\angle\mathrm{ABC}}{\cos\angle\mathrm{ABC}}=\dfrac{\frac{\sqrt{14}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{7}$ よって　$\mathrm{EC}=\mathrm{BC}\cdot\tan\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{14}$ 
		②	四角形ABCDは円に内接するから ∠ADE＝∠ABC よって　$\tan\angle\mathrm{ADE}=\tan\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{7}$ また　△ADEは∠DAE＝90°の直角三角形であるから 求める三角形の面積は $S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AD}\tan\angle\mathrm{ADE}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\left(\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)\cdot\sqrt{7}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

Ⅲ
５０

令４　中学校・高等学校数学　模範解答

Ⅳ

（1）

$-3 < k < 1$

（2）

①，②より，y を消去して整理すると

$x^2 + (3-k)x + k^2 = 0$ ……③

③を解くと

$$x = \frac{-(3-k) \pm \sqrt{(3-k)^2 - 4k^2}}{2}$$

よって，点Mの x 座標は

$$x = \frac{1}{2}\left\{\frac{-(3-k) + \sqrt{(3-k)^2 - 4k^2}}{2} + \frac{-(3-k) - \sqrt{(3-k)^2 - 4k^2}}{2}\right\} = \frac{1}{2}(k-3) \quad \cdots\cdots ④$$

また，点Mの y 座標は，②，④より

$$y = k \cdot \frac{1}{2}(k-3) - k^2 = -\frac{1}{2}(k^2 + 3k) \quad \cdots\cdots ⑤$$

したがって，点Mの座標は

$$\left(\frac{1}{2}(k-3), -\frac{1}{2}(k^2 + 3k)\right)$$

（3）

④より

$$x = \frac{1}{2}(k-3)$$

であるから　$k = 2x + 3$ ……⑥

これを⑤に代入して k を消去すると

$$y = -\frac{1}{2}\{(2x+3)^2 + 3(2x+3)\}$$

すなわち

$y = -2x^2 - 9x - 9$

また，（1）と⑥より

$-3 < 2x + 3 < 1$　すなわち　$-3 < x < -1$

よって，求める点Mの軌跡は

放物線　$y = -2x^2 - 9x - 9$　の　$-3 < x < -1$の部分である。

Ⅳ
５０