高等学校数学Ⅰにおける二次方程式、二次不等式及び二次関数の学習指導に関する一考察

－中学校から高等学校への学習内容の円滑な移行を目指して－

高校教育研修課　指導主事　駒田　勝

はじめに

平成 17 年 11 月、国立教育政策研究所教育課程研究センターが、高等学校学習指導要領（平成 11 年告示）に基づく教育課程状況について、各教科、科目の目標や内容に照らした学習の実現状況の把握調査をおこなった。この調査「高等学校教育課程実施状況調査」は、全国の全日制課程（中等教育学校後期課程を含む）の第３学年の生徒と、教師を対象に、無作為抽出により実施された。

この調査のうち、教師を対象とした質問紙調査の結果によると、数学Ⅰの学習内容のうち「二次関数と二次方程式や二次不等式との関係」を“生徒にとって理解しにくい内容である”と考える教師の回答の割合は 75.8%にも達することが分かった[1)]。これは、数学Ⅰの他の内容と比しても極めて高い割合であった。

また、生徒を対象とした質問紙調査の結果では、「二次関数と二次方程式や二次不等式との関係」を“よく分かった”とする生徒の回答の割合が 26.6%と３割にも満たない結果であった[2)]。

これら二次方程式、二次不等式及び二次関数は、中学校三年生の履修内容と極めて密接に関係し、高等学校数学で最初に学ぶ内容である。これらの内容を学習者に十分に理解させることは、中学校から高等学校への学習内容の円滑な移行を促進し、この後の数学を学習していくうえにおいて重要なことである。

そこで本研究では、特に、二次不等式の解法に着目し、「二次関数と二次方程式や二次不等式との関係」をよりよく生徒に理解させる学習指導について考察することにする。具体的には、質問紙法により、学習者のつまずきの原因を調査分析し、学習者が抱える課題を明確にする。更に、課題を解消するための方策を示し、学習指導の一助とする。

1　問題の所在について　－ 学習指導要領解説と高等学校教育課程実施状況調査より －

伊藤伸也(2002)は、二次不等式の解法において、「２次不等式を解く方法には大きく２つの方法が考えられる。ひとつは、２次不等式に対して式変形をほどこすことでその解を得る方法であり、この方法は文字式に対する処理により解を求めるという点から代数的アプローチとよばれる。もうひとつは、不等式に対応する関数のグラフを用いて、視覚的にその解を得る方法であり、この方法は関数アプローチとよばれる」と２つの考え方を整理している[3)]。

本研究では、二次不等式を解く２つの方法を記述する際、伊藤の用いたこれらの名称を使用することとし、二次不等式の式変形から解を求める方法を「代数的アプローチ」、二次不等式に対応する放物線の概形と x 軸との位置関係を用いて解を求める方法を「関数アプローチ」と定義する。

次に、本章第１節では学習指導要領解説が求める「二次関数」の扱いについて考察し、第２節では、新学習指導要領にも影響を与えた高等学校教育課程実施状況調査に問題の所在を探ることにする。第３節では当所で実施した「中・高等学校の接続を意識した数学授業指導研修講座」について述べる。

(1)　学習指導要領解説での「二次関数と二次方程式や二次不等式との関係」の扱いについて

現行の学習指導要領解説では、「二次関数」の内容について、「二次関数について理解し、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識するとともに、それを具体的な事象の考察や二次不等式を解くことなどに活用できるようにする」と示し、内容の取扱として、「イの(ｲ)については、二次関数のグラフと x 軸との位置関係から解を求めるものとする」と述べられている。ここでいうイ(ｲ)とは、二次不等式を指している。

また、内容の取扱の補足として、「二次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフとx軸との位置関係から、二次不等式の解の意味を理解させ、二次不等式の解を求めることができるようにし、グラフを活用することのよさを認識させる」と述べられており、関数アプローチによる二次不等式の解法を求めている。なお、関数アプローチによる解法は、二次不等式が「二次関数」の領域に移された平成元年の学習指導要領改訂から現在まで続いている。因みに、平成元年以前の学習指導要領解説では二次不等式は「方程式と不等式」の領域で扱われ、その解法は代数的アプローチによるものであった。

さて、平成 21 年7月の新学習指導要領解説では、「二次関数」の内容について、「二次関数とそのグラフについて理解し、二次関数を用いて数量の関係や変化を表現することの有用性を認識するとともに、それらを事象の考察に活用できるようにする」と示し、内容の取扱として、「二次方程式の解と二次関数のグラフとの関係について理解するとともに、数量の関係を二次不等式で表し二次関数のグラフを利用してその解を求めること」と述べられている。

また、内容の取扱の補足として、「今回の改訂で、二次方程式の解の公式は中学校で扱われることになった。ここでは、まず二次方程式の解が二次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフとx軸との交点のx座標でとらえられることを理解させる。さらに、二次不等式では、二次不等式の解の意味を理解させ、二次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフとx軸との位置関係から二次不等式の解を求めることができるようにするとともに、グラフを活用することのよさを認識させる。二次不等式は生徒にとって理解しにくい内容であるので、二次関数のグラフと二次不等式の解の関係をより丁寧に扱うことが大切である」と対応を求めている。

新学習指導要領解説の「二次関数と二次方程式や二次不等式との関係」に係る内容では、特に

① 二次方程式が、「方程式と不等式」から「二次関数」の領域に移り、二次方程式$ax^2+bx+c=0$の解を、二次関数$y=ax^2+bx+c$グラフとx軸との交点のx座標の関係で理解させる。

② 二次不等式は生徒にとって理解しにくい内容であるので、二次関数のグラフと二次不等式の解の関係をより丁寧に扱うことが大切である。

の２点に留意する必要がある。これらのことは、「二次方程式、二次不等式及び二次関数の学習指導」を考えていく上で欠くことのできない内容となる。

(2) 高等学校教育課程実施状況調査結果に見る課題について

平成 19 年４月、国立教育政策研究所教育課程研究センターが、平成 17 年 11 月に実施した高等学校教育課程実施状況調査の結果を発表した。発表された結果のうち、「平成 17 年度高等学校教育課程実施状況調査　教科・科目別分析と改善点」には、生徒質問紙調査における「数学Ⅰで勉強した内容について感じたこと」と、教師質問紙調査「指導した際の学習状況等」の関係に着目した結果がまとめられている（図１）[4]。

図１は、10 の質問項目のうち、生徒の回答の割合と教師の回答の割合が概ね 15%以上の開きのある５項目をまとめたものである。この調査結果によると、数学Ⅰで最も基本的な内容である「実数の性質と簡単な無理数の四則計算」ですら生徒が「よく分かった」とする回答の割合が５割に満たなかった。更に、「不等式の性質と一次不等式」では、生徒の「よく分かった」とする回答の割合が 42.4%、「二次方程式」でも 51.3%と低い値を示した。

一方、この３項目において、教師が「生徒にとって理解しやすい」とする回答の割合は、いずれも６割を超えており、生徒と教師の間に意識のズレを見て取ることができる。この意識のズレは、生徒の実態を教師が十分に把握できていない現状を浮き彫りにしていると言える。

高等学校数学を学んでいくうえで、基本的な内容であるこの３項目の理解が十分でないということは、これに続く高等学校数学の学習内容に大きな弊害をもたらすものと考えられる。

従って、「二次関数と二次方程式や二次不等式との関係」における生徒の「よく分かった」とする回答の割合が 26.6%に留まる根本的な理由もこのことに起因しているものと考えられる。

また、図１には記載されていないが、同調査の質問項目「二次関数のグラフ」では、生徒の「よく分か

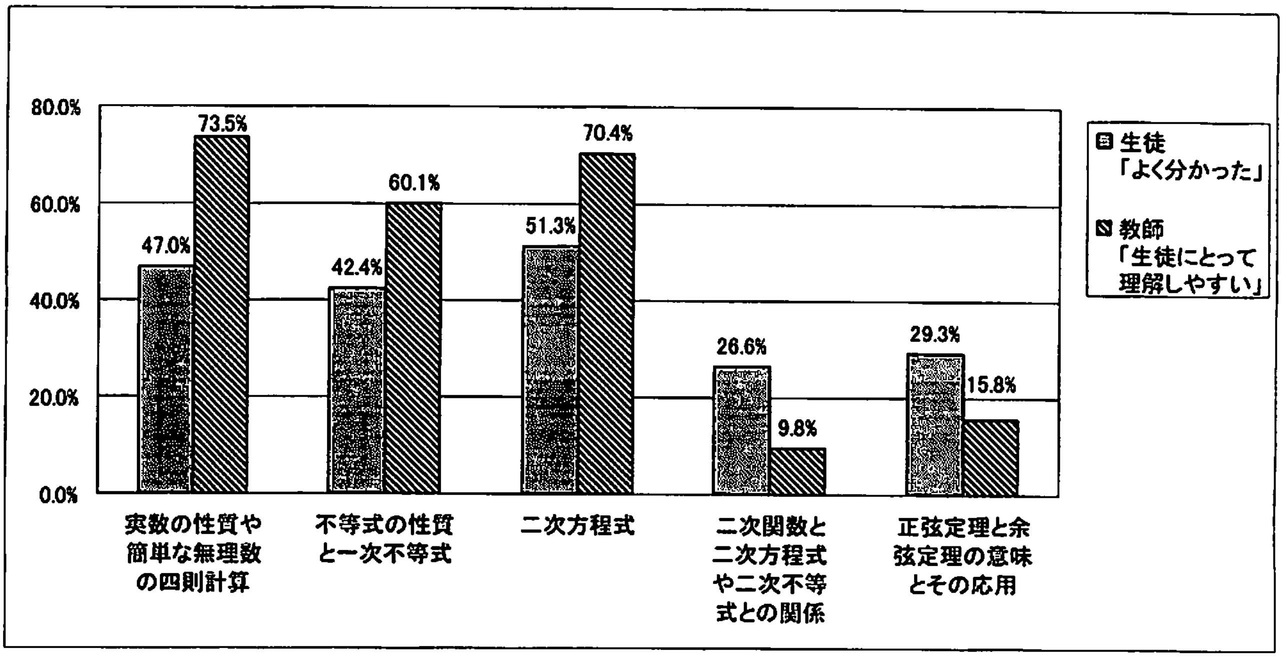


図１　生徒質問紙調査と教師質問紙調査との比較

った」とする回答の割合が 33.1%と低かった [5]。このことは、学習指導要領解説が求める二次不等式の解法に関数アプローチを用いることの困難さを示しており、「二次関数と二次方程式や二次不等式との関係」における生徒の「よく分かった」とする回答の割合が 26.6%に留まる２つ目の理由であると考えられる。

次節では、中学校の履修内容と密接に関係し、高等学校数学で最初に学ぶ「二次関数」に焦点をあて、当所で実施した「中・高等学校の接続を意識した数学授業指導研修講座」について述べる。

(3)　「中・高等学校の接続を意識した数学授業指導研修講座」の概要

ア　概要

学習指導要領の改訂により、数学科においては教科の内容の系統性を重視しつつ、学年間や校種間で内容の一部を重複させて、発達や学年の段階に応じた反復学習がますます求められている。

そこで、中学校と高等学校の接続分野である二次方程式、二次関数をテーマとして模擬授業を行い、各校種間の授業を相互に吟味することで授業改善の方策をさぐり、中・高等学校の系統だった数学の授業の在り方について研修し、指導力の向上を図ることを目的として、10 月５日（月）、６日（火）に一泊二日の日程で本講座を実施した。

また、次の①～③の３点をこの講座のねらいとした。

①　中・高等学校の接続を意識した授業の必要性が理解できるようになる。

②　中・高等学校の接続を意識した学習指導計画が作成できるようになる。

③　授業評価を生かした授業改善の技法が習得できる。

イ　研修内容について

本講座は、中・高等学校及び特別支援学校（中・高等部）で数学科を担当する教員を受講対象としている。受講者は、合計９人（中学校教諭４人、高等学校教諭５人）であった。

本講座では、中・高等学校の学習内容の対応表（資料１）を作成し、中・高等学校の接続を意識した模擬授業などを行った。これらの研修を通して受講者は、平素意識することの少なかった校種間の学習内容の接続について学び、その必要性を再確認することができた。更に、異校種の授業の在り方を知ることで、自らの授業に広がりを持たせることができるなど、受講者にとって、実りの多い研修となった。

また、本講座に参加され、中・高等学校の数学の学習内容の接続を考えるうえで、特に「二次関数」の扱いが大切であることを学ばれた本県公立学校教員のうち、全日制の高等学校に勤務する５名の受講者に対し、質問紙調査を依頼した。

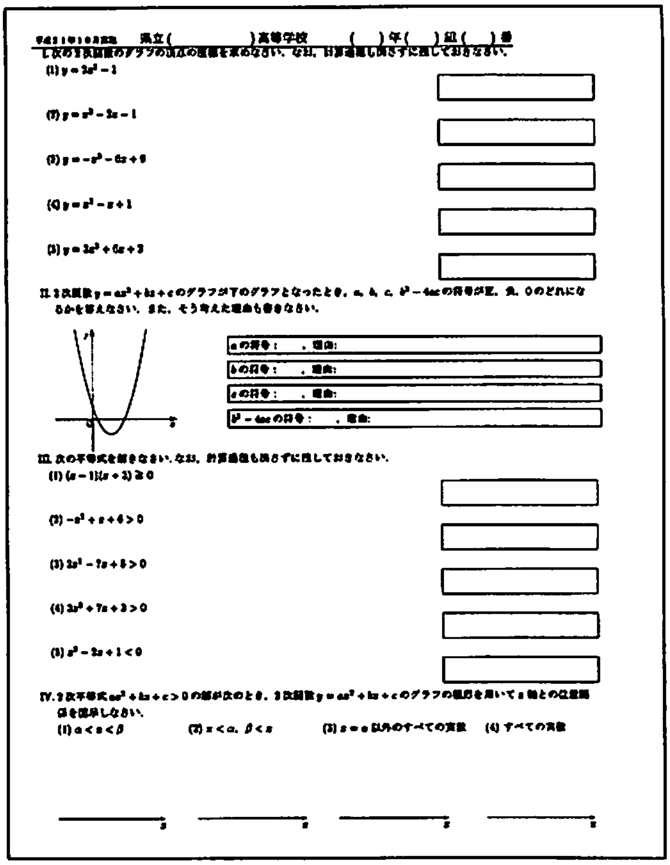
次章では、この調査をもとに「二次関数と二次方程式や二次不等式との関係」について、学習者のつまずきの原因を調査分析し、学習者が抱える課題を明確にしていく。

2　学習者のつまずきの原因の調査と分析　－ 質問紙法による調査と分析 －

(1)　質問紙法による調査の実施について

第１章で確認した高等学校教育課程実施状況調査の結果を踏まえ、特に、二次関数のグラフと二次不等式に焦点をあて、次のアの要領で質問紙調査を実施した（図２）。なお、二次不等式の解を求める際、二次方程式を利用するため、二次方程式に係る質問は設けなかった。

また、図２は資料２として本小論末に添付した。


県立（　　　）高等学校　（　）年（　）組（　）番

(2) $y = x^2 - 2x - 1$

(4) $y = x^2 - x + 1$

a の符号：　，理由：

b の符号：　，理由：

c の符号：　，理由：

$b^2 - 4ac$ の符号：　，理由：

(1) $(x-1)(x+3) \geqq 0$

(2) $-x^2 + x + 6 > 0$

(4) $2x^2 + 7x + 3 > 0$

(5) $x^2 - 2x + 1 < 0$

(1) $\alpha < x < \beta$　(2) $x < \alpha,\ \beta < x$　(4) すべての実数

図２　質問紙調査票

ア　調査方法

「中・高等学校の接続を意識した数学授業指導研修講座」に参加された受講者のうち、本調査を依頼した５人の受講者が勤務する学校で、第１学年のうち２クラスを抽出し、二次関数の授業をすべて終えた 11 月末を目途に質問紙調査を実施した。なお、クラスの抽出に当たっては、習熟度別クラスなど学力に著しい偏りが生じないように配慮した。

この結果、364 人の生徒から調査結果を集めることができた。

イ　各設問のねらい

質問紙調査票の各設問のねらいは、次の通りである。

(ｱ)　設問Ⅰは、二次関数のグラフの方程式から頂点の座標を求めさせる。
- a　小問(1)　平方完成することを必要としないタイプ
- b　小問(2)　最も基本的なタイプ
- c　小問(3)　x^2 の係数が負の数のタイプ
- d　小問(4)　x の係数が奇数のタイプ
- e　小問(5)　x^2 の係数が１以外の正の数のタイプ

(ｲ)　設問Ⅱは、二次関数のグラフとその方程式の関係を文章で説明させる。
- a　a の符号　二次関数のグラフと x^2 の係数との関係
- b　b の符号　二次関数のグラフと軸の方程式との関係
- c　c の符号　二次関数のグラフと y 軸との関係
- d　b^2-4ac の符号　二次関数のグラフと x 軸との関係（判別式の意味）

(ｳ)　設問Ⅲは、二次不等式の解を求めさせる。
- a　小問(1)　因数分解を必要としないタイプ
- b　小問(2)　x^2 の係数が負の数のタイプ（二次関数のグラフが上に凸）
- c　小問(3)　いわゆる「たすき掛け」を用いた因数分解を利用するタイプ（二次方程式の解の公式も使用可）

d　小問(4)　二次方程式の解の公式を利用するタイプ

e　小問(5)　二次不等式が解を持たないタイプ

(エ)　設問Ⅳは、二次不等式とその解から、二次関数のグラフの概形と x 軸の位置関係を図示させる。

a　小問(1)　二次関数のグラフが上に凸となる場合

b　小問(2)　二次関数のグラフが x 軸と異なる２点で交わる場合

c　小問(3)　二次関数のグラフが x 軸と接する場合

d　小問(4)　二次関数のグラフと x 軸と共有点をもたない場合

(2)　調査結果及びその分析について

調査数 364 人分の調査結果を設問ごとに、小問の解答を正解、誤答、無記入の３種類に分類し、それぞれの該当人数と調査人数に対する該当人数の割合を百分率表示した表を作成した。

また、本節では正解率が低いなど特徴のある結果についてのみ、小問ごとにその傾向をまとめ、つまずきの原因を明らかにする。

ア　設問Ⅰについて

二次関数のグラフの最も特徴ある点は頂点であり、二次関数のグラフを扱う上で、頂点の座標に係る学習内容についての理解は極めて重要である。表１は、二次関数の頂点の座標を求めさせた結果を小問ごとにまとめたものである。

表１　設問Ⅰの調査結果について

	設問Ⅰ				
	小問(1)	小問(2)	小問(3)	小問(4)	小問(5)
調査数	364	364	364	364	364
正解数	173	249	174	196	196
	47.5%	68.4%	47.8%	53.9%	53.9%
誤答数	139	83	156	100	112
	38.2%	22.8%	42.9%	27.5%	30.8%
無記入数	52	32	34	68	56
	14.3%	8.8%	9.3%	18.7%	15.4%

設問Ⅰの調査結果からは、二次関数のグラフの方程式を平方完成する最も基本的な小問(2)の正解率は 68.4%と高い値を示した。他の小問では概ね 50%の正解率であった。

一方で、式変形を伴わない小問(1)で最も正解率が低く 47.5%となったことは興味深い。なお、設問Ⅰの全問正解者数は 79 人(21.7%)、全問不正解者数（無記入者数含む）は 76 人(20.9%)であった。

(ｱ)　小問(1)の誤答分析

表２は、139 人の誤答から、誤答人数の多い順にまとめたものである。

a　表２①について

次式は、二次関数のグラフの方程式 $y=2x^2-1$ を平方完成することで誤った例である。

$$y=2x^2-1=2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=2\left\{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right\}=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

表２　小問(1)の誤答例

	誤答例	人数
①	$\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8}\right)$	32 人
②	(1, 0)	11 人
③	(1, -1)	9 人
正解 (0, -1)		

この誤答は、頂点の座標を求める問題の解法を平方完成することに直結させ、その意味を考えずに計算しているものと思われる。

上記の第３式の $\frac{1}{2}$ を $\frac{1}{2}x$ とみなせば、第４式以後は正しく計算されており、平方完成する方法を理解していることがわかる。因みに、①の誤答者 32 人のうち、小問(2)から(5)のすべて正解の生徒は 16 人(50.0%)であった。

また、①と同じ発想をしながら与式を平方完成する際、計算ミスにより$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$や$\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{16}\right)$などと解答する例も見られた。

b　表2②と③について

②と③の誤答の多くは、計算過程が書かれていないのが特徴であり、与式から直接解答を得たものと思われる。なお、計算式を残した8名のうち、$y=2x^2-1=2(x-1)^2-1$とするなど、①の誤答と同様に平方完成を試みている例もあった。

概して、②と③の誤答をした生徒の多くは、小問(1)以外でも誤答を重ねており、②と③の誤答者計 20 人のうち、小問(2)から(5)のすべて誤答の生徒は 10 人(50.0%)、すべて正解の生徒は3人(15%)であった。

(イ)　小問(3)の誤答分析

表3は、156 人の誤答から、誤答人数の多い順にまとめたものである。小問(3)の誤答者の大半は、不適切な計算による誤答であった。その多くが、x^2の係数のマイナス記号の不適切な扱いによるものであった。

表3　小問(3)の誤答例

	誤答例	人数
①	(-3, 0)	36 人
②	(3, 0)	23 人
③	(3, 18)	21 人
④	(-3, -18)	13 人
正解 (-3, 18)		

①から④の誤答者の典型的な計算例は次の通りである。

①の計算例　$y=-x^2-6x+9=-(x^2+6x)+9=-(x+3)^2-9+9=-(x+3)^2$

②の計算例　$y=-x^2-6x+9=-(x^2-6x)+9=-(x-3)^2-9+9=-(x-3)^2$

③の計算例　$y=-x^2-6x+9=-(x^2-6x)+9=-(x-3)^2+9+9=-(x-3)^2+18$

④の計算例　$y=-x^2-6x+9=-(x^2+6x)-9=-(x+3)^2-9-9=-(x+3)^2-18$

①は第4式で、②は第3式と第4式で、③は第3式、④では第3式と第4式で誤っている。

イ　設問Ⅱについて

本問では、文字を用いて表された二次関数のグラフの方程式と与えられた放物線の関係を文章で説明させた。表4に示すとおり、aの符号を除いて生徒の理解が低いことがわかる。特に、bの符号は正解率が 10.7%と極めて低い。

表4　設問Ⅱの調査結果について

	設問Ⅱ			
	aの符号	bの符号	cの符号	b^2-4acの符号
調査数	364	364	364	364
正解数	202	39	143	112
	55.5%	10.7%	39.3%	30.8%
誤答数	72	165	109	70
	19.8%	45.3%	30.0%	19.2%
無記入数	90	160	112	182
	24.7%	44.0%	30.8%	50.0%

(ア)　bの符号の誤答分析

本小問の正解率が低いのは、放物線の軸の方程式を理解できていない生徒が多いことに加え、符号を決定した理由を的確に説明できない解答が多かったためである。

実際、設問Ⅰを全問正解した 79 人の生徒ですら、bの符号の正解者数は 19 人(24.1%)と低かった。この結果は、代数的な計算が的確にできる生徒でも、二次関数のグラフの方程式と放物線の関係を十分に理解し、的確に説明することができていないことを意味している。因みに、設問Ⅰを全問正解した 79 人のうちaの符号の正解者数は 70 人(88.6%)、cの符号、b^2-4acの符号はともに 55 人(69.6%)、52 人(65.8%)であった。

本小問の解答表記は多種に及ぶため、各解答人数を併記せず、主な誤答のみ表5に例示した。

(ｲ)　b^2-4ac の符号の誤答分析

無記入者の割合が 50.0％と、特に高い値を示した小問である。無記入者が多かった理由として、二次関数のグラフの方程式と放物線の概形のもつ意味が理解できていない生徒が多いためだと考えられる。つまり、x 軸（$y=0$）と二次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフとの交点の x 座標の値を求める式が、二次方程式 $0=ax^2+bx+c$ であり、b^2-4ac は、この二次方程式の解の個数（放物線と x 軸との共有点の個数）を調べる D（判別式）であることを理解できていないためだと考えられる。

一方で、正解者の解答表記は、(ｱ)ほど多種に及ぶことなく的確な表現が目立った。

また、調査校５校のうち、調査成績上位２校に限れば、155 人中 94 人(60.6%)が正解であった。なお、他の３校の結果は、209 人中正解者数は 18 人(8.6%)と低迷し、十分な理解が得られていなかった。

表５　b の符号の誤答例

	理由の誤答例
①	a が正だから
②	頂点の x 座標が正だから
③	頂点の座標から
④	$-\dfrac{b}{2a}$ が正だから
正解 b の符号：負 理由：軸の方程式 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$ かつ $a>0$ であることより、$b<0$ となる	

ウ　設問Ⅲについて

表６は、二次不等式の理解度を調べた結果を小問ごとにまとめたものである。最も基本的な小問(1)、(2)では、正解率が 60%を超えたが、小問(3)は、二次方程式の解法に、いわゆる「たすき掛け」を用いた因数分解（または解の公式)、小問(4)では、二次方程式の解の公式を必要とするため、正解率が 50%前後まで下がったものと思われる。

表６　設問Ⅲの調査結果について

	設問Ⅲ				
	小問(1)	小問(2)	小問(3)	小問(4)	小問(5)
調査数	364	364	364	364	364
正解数	239	223	190	180	124
	65.7%	61.3%	52.2%	49.5%	34.1%
誤答数	104	106	109	77	175
	28.6%	29.1%	30.0%	21.2%	48.1%
無記入数	21	35	65	107	65
	5.8%	9.6%	17.9%	29.4%	17.9%

また、小問(5)は、二次不等式の解がないタイプの問題であり、正解率が 34.1%と特に低く、誤答率は高くなった。誤答者の中には、二次不等式の解を $x>3,-2$ や $x<1<x$ と書くなど、不等式の意味そのものが理解できていない者もいた。

(ｱ)　小問(1)の誤答分析

小問(1)は、正解率が 65.7%と最も高い値を示した問いであるが、課題も見られた。

通常、二次不等式の解を書く際、左から右に解が大きくなるように並べて書くことが多い。つまり、二次不等式の解を関数アプローチによるグラフのイメージから求めたのであれば、x 軸と同様に解が左から右に順に大きくなるように書かれる（以下、「二次不等式の解の表記の規則性」という)。関数アプローチを用いれば、表７のような解答は現れにくい。

しかしながら、本調査では、二次不等式の解の表記の規則性が見受けられない解答が目立った。このことは、二次不等式の解を求めるのに、放物線のグラフを視覚的にイメージしていないためだと考えられる。この表記は、調査をおこなった５校全ての学校で存在した。なお、表７に示すように正解者でも②や⑤と書いていることに注意したい。

表７　小問(1)の解答例

	解答例
①	$x\geqq-3,\ 1\geqq x$
②	$-3\geqq x,\ 1\leqq x$
③	$x\leqq1,\ -3\leqq x$
④	$3\geqq x\geqq1$
⑤	$x\geqq1,\ x\leqq-3$
正解	$x\leqq-3,\ 1\leqq x$

(ｲ)　小問(5)の誤答分析

表８は、175 名の誤答から、誤答人数の多い順にまとめたものである。誤答者の多くは、与式を $x^2-2x+1=(x-1)^2<0$ と正しく式変形ができていた。

しかしながら、表８の誤答例①や⑤からもわかるように、二次不等式の解として不適切なものもあった。

また、与式を変形して、二次関数 $y=(x-1)^2$ のグラフと x 軸との位置関係をイメージすれば、①や⑤は起こりえない誤答であり、その解法に関数アプローチが用いられていないことがわかる。

表８　小問(5)の誤答例

	誤答例	人数
①	$x<1$	43 人
②	$x=1$	28 人
③	1 以外のすべての実数	9 人
④	$x<1<x$	9 人
⑤	$1<x$	8 人
⑥	$-1<x<1$	8 人
正解　解なし		

エ　設問Ⅳについて

表９は、二次不等式とその解から、二次関数のグラフの概形と x 軸の位置関係について調べた結果である。

表９　設問Ⅳの調査結果について

	設問Ⅳ			
	小問(1)	小問(2)	小問(3)	小問(4)
調査数	364	364	364	364
正解数	70	184	198	186
	19.2%	50.6%	54.4%	51.1%
誤答数	188	70	41	56
	51.7%	19.2%	11.3%	15.4%
無記入数	106	110	125	122
	29.1%	30.2%	34.3%	33.5%

(ｱ)　小問(1)の誤答分析

本小問(1)の具体的な問いが、設問Ⅲの小問(2) $-x^2+x+6>0$ である。設問Ⅲの小問(2)の正解者数 223 人のうち、本問の正解者数は 65 人(29.2%)と低かった。これは、与えられた条件からグラフが上向きに凸であることを理解できなかったものと考えられる。加えて、二次不等式の解を具体的に求めることと、放物線と x 軸との位置関係を用いて二次不等式の解を視覚的にイメージすることが、十分に結びついていないことも考えられる。

(ｲ)　小問(3)の誤答分析

本小問(3)の具体的な問いが、設問Ⅲの小問(5)　$x^2-2x+1<0$ である。設問Ⅲの小問(5)の正解者数 124 人のうち、本小問の正解者の数は 103 人(83.1%)であり、概ね正解していることがわかる。

しかしながら、設問Ⅳの小問(3)の正解者数 198 人のうち、設問Ⅲの小問(5)の正解者数は 103 人(52.0%)とほぼ半減している。これは、本問の二次不等式の解が特殊な場合（放物線が x 軸と接する）であり、意味を考えないで「このときはグラフの概形はこうなる」と結果だけを覚えていることが疑われる。実際、設問Ⅲの小問(5)　$x^2-2x+1<0$ のような二次不等式では、放物線の概形が x 軸と接し、不等号の向きによって「解なし」や「すべての実数」など解答が多岐に及ぶため、二次不等式とグラフの関係の理解が曖昧な生徒には誤答が多くなる。その結果、放物線の概形と x 軸との位置関係がイメージできていても、必ずしも二次不等式の解法に結びつくことはない。

(3)　設問Ⅲと設問Ⅳの関係について

「エ　設問Ⅳについて」で考察した内容について、参考資料として表 10 と表 11 を掲載しておく。表 10 と表 11 は、設問Ⅲと設問Ⅳの対応する小問の結果をクロス表示したものである。表中の百分率は調査人数 364 人に対する該当人数の割合を表している。

表 10 からは、二次不等式を解くことができても、抽象的な文字の表記による放物線のイメージが必ずしもできていないことがわかる。逆に、表 11 から抽象的な文字の表記による放物線のイメージができていても、二次不等式を必ずしも解くことができていないことがわかる。なお、この説明に該当する内容について、表中のデータに網掛けを施した。

表 10　設問Ⅲ小問(2)と設問Ⅳ(1)の関係について

		設問Ⅳ小問 (1)			計
		正解数	誤答数	無記入数	
設問Ⅲ小問(2)	正解数	65	120	38	223
		17.9%	33.0%	10.4%	61.3%
	誤答数	4	51	51	106
		1.1%	14.0%	14.0%	29.1%
	無記入数	1	17	17	35
		0.3%	4.7%	4.7%	9.6%
計		70	188	106	364
		19.2%	51.7%	29.1%	100.0%

表 11　設問Ⅲ小問(5)と設問Ⅳ(3)の関係について

		設問Ⅳ小問 (3)			計
		正解数	誤答数	無記入数	
設問Ⅲ小問(5)	正解数	103	4	17	124
		28.3%	1.1%	4.7%	34.1%
	誤答数	83	23	69	175
		22.8%	6.3%	19.0%	48.1%
	無記入数	12	14	39	65
		3.3%	3.9%	10.7%	17.9%
計		198	41	125	364
		54.4%	11.3%	34.3%	100.0%

例えば、表 10 の 120(33.0%)の網掛けは、設問Ⅲ小問(2)の正解者の数 223 人のうち、設問Ⅳ小問(1)の誤答者の数が 120 人であることを表している。このことから、具体的な問題で二次不等式の解を求めることができたが、抽象的なグラフの概形を描くことができなかった者が多いことがわかる。

3　学習者が抱える課題について

本章では、前節の調査結果の分析を踏まえ、学習者の抱える課題についてまとめる。

(1)　基本的な計算能力の不足について

本調査の分析結果から学習者の多くが基本的な計算能力の不足から、単純な計算ミスをして誤答を重ねていることがわかった。ここでいう基本的な計算能力とは、高等学校入学直後に学習する因数分解や不等式などに限ったものではなく、最も計算の基本となる法則、つまり、交換法則や結合法則、分配法則までを含めており、指導者である教師は学習者である生徒にこれらの基本法則を含め、正しく扱えるように繰り返し訓練を施すことが必要であることがわかった。

また、第 1 章第 2 節で考察したように、「実数の性質や簡単な無理数の四則計算」をはじめ、二次関数を学ぶ前段階の学習内容において、教師と生徒の意識のズレが生じていることを指摘した。つまり、これらの内容において、指導者は今以上により丁寧な指導を心がける必要があり、学習者の基本的な計算能力の向上が「二次関数と二次方程式や二次不等式との関係」の理解を推し進めるものと考えられる。

(2)　学習者は、何をしなければならないかを知っているが、その意味がわかっていない

二次関数のグラフの方程式から頂点の座標を求める際、二次関数のグラフの方程式が一般形 $y=ax^2+bx+c$ の場合、平方完成し $y=a(x-p)^2+q$ の形に直して頂点の座標 $(p,\ q)$ を求める。学習者の多くはこのことを理解し、各小問を平方完成することで放物線の頂点を求めようと努力していることがわかった。

しかしながら、(1) で述べたように計算能力の不足から多くの学習者が計算ミスをして、誤答を重ねている。加えて、設問Ⅰ小問(1) $y=2x^2-1$ では、平方完成する必要のない方程式に無理矢理に平方完成しようと試みて、誤答している解答が多数存在していることを述べた。

これらの結果を踏まえれば、学習者が放物線の頂点の座標を計算で求めることができても、必ずしもその意味を理解しているとは限らず、ただ単に手順に従って計算しているだけであることも意識して指導者は指導に当たらねばならない。

(3)　関数アプローチによる二次不等式の解法の困難性について

現行の学習指導要領解説では、二次不等式の解法に関数アプローチを用いて、グラフを活用することの

よさを認識させることを求めている。また、新学習指導要領解説でも、二次不等式が生徒にとって理解しにくい内容であることを述べたうえで、二次不等式の解法に際しては、関数アプローチによる、より丁寧な扱いを求めている。

一方で、第1章第2節で述べたとおり、高等学校教育課程実施状況調査の結果において、質問項目「二次関数のグラフ」を「よく分かった」とする生徒の回答の割合が33.1%と低迷していた。このことは、前述の(1)、(2)からもわかるように、学習者の計算能力の不足や、その意味を考えないで計算し具体的なイメージが伴っていないことからも頷けるものであり、「二次関数のグラフ」は学習者にとって、理解しにくい内容であることがわかる。

また、松本修身(2009)が県下5校の高等学校の1、2年生444人に実施した、数学Iの単元についての意識調査（複数回答可）では、「二次関数」を得意とする回答43人に対して、苦手とする回答は127人であったと報告されている[6]。

さて、二次不等式の理解度を調べた設問Ⅲの分析結果では、表6に示したとおり小問(5)を除いて、正解率が概ね50%を超えていた。

しかしながら、表7に示したように二次不等式の解の表記の規則性が見受けられない解答や、表8①、⑤のように二次不等式の解としてあり得ない誤答など、関数アプローチが用いられているとは考えにくい解答が多数見受けられた。特に、表7の解答例は、二次不等式の解を求めることができる学習者でも、代数的な計算式の意味と幾何的なグラフの意味が必ずしも結びついて理解しているとは言えず、関数アプローチを用いた視覚的なイメージによる二次不等式の解法が理解できているとは言い切れないことを物語っていた。これらの結果を踏まえると、新学習指導要領解説に記載された「二次不等式は生徒にとって理解しにくい内容である」ということに加え、「二次関数のグラフ」は生徒にとって理解しにくい内容であり、その理解しにくい二次関数のグラフを用いること、たとえそれが二次関数のグラフの概形であっても、学習者には理解しにくい内容であることも指導者側は意識せねばならない。つまり、二次不等式の指導にあたっては、二次不等式が理解しにくい内容であるだけではなく、学習者にとって理解しにくい二次関数のグラフに、二次不等式の解法を求めようとしているところにも問題があることを指導者側は注意する必要がある。

また、新学習指導要領解説は、二次不等式の解法において「二次関数のグラフと二次不等式の解の関係をより丁寧に扱うことが大切である」としているが、当然のことながら、その前段階の学習内容「二次関数のグラフ」の扱いも含め、学習者の内容理解が今以上に進まなければ、二次不等式に関数アプローチを用いることの有用性を学習者に認識させることは困難であることも指導者は意識しなければならない。ここでいう関数アプローチを用いることの有用性とは、「グラフを活用することのよさを認識させる」ことである。

4 学習内容のよりよい理解を目指して ― 一次不等式を活用した「関数アプローチ」の理解について ―

本章では、前章の課題を踏まえ、学習者の二次不等式のよりよい理解に向けた一方策を述べることにする。

二次不等式の解法に関数アプローチを用いることは、扱っている内容を視覚的に理解できるという利点があった。加えて、高等学校数学の主な学習内容は「関数」であり、解法にグラフを用い、視覚的に課題を解決する方法は高等学校数学ではむしろ一般的な考え方である。つまり、関数アプローチのように、グラフを用いて二次不等式を視覚的にイメージして考え、解答を得るという方法は、将来、高等学校数学の学習を進めていく上で欠くことのできない有用な考え方なのである。

しかしながら、本小論で考察してきたように、学習者にとって関数アプローチによる二次不等式の解法は、様々な困難を伴い、理解しにくい内容であることがわかった。二次不等式の解法に関数アプローチを用いることは、二次方程式の解を求めることなどが必要であるが、それらに加え、与えられた二次不等式に幾何的

な内容であるグラフの概形を結びつけて考える必要があり、学習者にとってここに「思考の飛躍」があり、困難を伴う一因になっていると考えられる。学習者の中には、グラフの概形をどのように活用し、考えていけばいいのか、その根本的な意味が理解できていないために、関数アプローチを用いることの有用性を認識できていない者がいるものと思われる。実際、表７や表８で関数アプローチを用いたとは考えにくい解答や誤答があることを指摘してきた。また、二次不等式を解くことができても、放物線の概形をイメージすることができていない例や、その逆についても第３章で考察してきた。

そこで、この「思考の飛躍」を補完する一例として、一次不等式の解法にグラフを用いた考え方の導入を提案したい。この考え方は、教科書でも二次不等式の学習の最初に簡単に触れられてはいるが、この内容の取り扱いの大切さを強調しておきたい。一次不等式は、式変形による代数的な計算だけで解答が得られるため、一般に一次不等式の解法にグラフを用いることはない。このため、グラフを用いた一次不等式の解法が重視されることは少ない。

しかしながら、直線を用い、視覚的イメージから一次不等式を解くという考え方を学習者が理解することは、関数アプローチを学習する前段階として有用である。なぜならば、学習者にとって、直線の方が放物線よりなじみ深く、必要とする知識量も少ない。加えて、放物線を描くよりも、直線を描く方が平易であるため、代数的な知識に幾何的な知識を結びつけ易く、学習者には理解しやすい。このため、新学習指導要領解説が求めるように、二次不等式の解法を通して、グラフを活用することのよさを学習者に認識させるよりも、直線を用いてグラフを活用することのよさを学習者に認識させることの方がはるかに簡単である。直線を用いて、一次不等式の解法の意味が理解できれば、関数アプローチを用いて二次不等式を解く意味も自ずと理解できるものと考えられる。

例えば、

【例題】　不等式$2x-1>x+1$を解け。

（解答１）　xを含む項を左辺に、定数項を右辺に移項して、$x>2$を得る。

とするのが一般的な解答である。

次に、一次不等式にグラフを用いた解法を述べておく。

【例題】　不等式$2x-1>x+1$を解け。

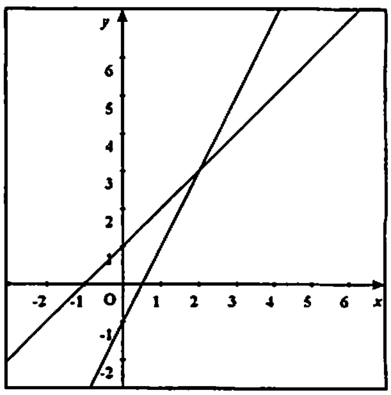
（解答２）　２直線$y_1=2x-1$と$y_2=x+1$の、交点のx座標を求める（中学校での既習内容の復習）。

$$2x-1=x+1$$
$$x=2$$

$x=2$を$y=x+1$に代入することで$y=3$を得る。

よって、求めたい交点の座標（2，3）となる。

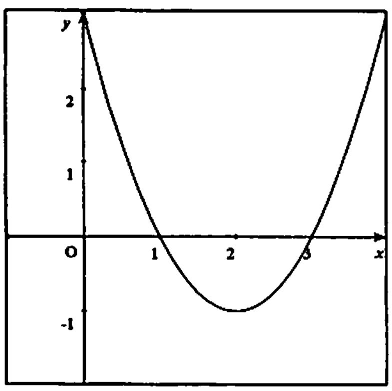
座標平面上のグラフより$y_1>y_2$を満足するxの範囲は$x>2$となる。



このように、解答２には二次不等式の解法のひとつ「関数アプローチ」の考え方がすべて盛り込まれていることがわかる。

参考までに、二次不等式$x^2-4x+3>0$の解を解答２にならって書いておく。

（解答）　放物線$y_1=x^2-4x+3$と直線$y_2=0$（軸の方程式）を用いて、交点のx座標を求める。二次方程式を解くことで、$x=1,3$を得る。グラフより$y_1>y_2$を満足するxの範囲は$x<1$，$3<x$となる。



最後に、本章で扱った内容はあくまでも関数アプローチの考え方を理解する前段階として有用であることを述べたのであって、このことが一次不等式の解法に適していると述べたのではないことを申し添えておく。

おわりに

本研究では、冒頭にも述べたように、特に、二次不等式の解法に着目して、「二次関数と二次方程式や二次不等式との関係」をよりよく生徒に理解させる学習指導の在り方を提案することを目的としてきた。

学習指導要領解説は、二次不等式の解法に関数アプローチを用い、視覚的にイメージすることで解を求めさせ、グラフを活用することのよさを認識させることを求めてきた。

しかしながら、今回実施した質問紙調査では、表７、表10の結果が示すように、二次不等式の解を求めることができる学習者でも、代数的な計算式の意味と幾何的なグラフの意味が必ずしも学習者の理解の中で結びついているとは言えず、関数アプローチを用いた視覚的なイメージによる二次不等式の解法が理解できているとは言い切れないことや、その逆の場合も考察してきた。これらのことは、「二次関数のグラフ」の学習内容が、学習者にとって理解しにくい内容であるということに加え、その理解しにくい内容を用いて二次不等式を解くということなどが、理解の障壁となっていることを確認した。更には、二次不等式の解法に、二次関数のグラフを結びつけて理解することそのものに「思考の飛躍」があり、学習者が困難を感じる一因となっているのではないかとする持論も述べ、それに対する一方策も提案した。

また、二次関数のグラフを扱う上で欠くことのできない頂点の座標を求める際、学習者は何をしなければならないかを分かっていた。しかし、計算の基本となる法則を含め、因数分解や不等号の意味など数学の基本的事項を正しく理解していないため、誤答を重ねていることも指摘した。

これらの課題を解決させるためには、指導者は「二次関数」の前段階の学習内容を今以上に丁寧に扱い、基本的な計算方法を学習者にしっかりと習得させることが必要である。また、そうすることが、「二次関数のグラフ」の理解を深め、更には「二次不等式」の理解につながるものと考えられる。この際、これらの学習内容は、指導者が考えるほど「学習者にとって理解しやすい」ものでなく、第１章第２節で確認したように教師と生徒の意識のズレがあることを忘れてはならない。

最後に、本研究に関する調査に協力してくださった先生方、また、「中・高等学校の接続を意識した数学授業指導研修講座」を受講していただいた先生方に感謝します。

注）

1) 国立教育政策研究所教育課程研究センター『平成17年度高等学校教育課程実施状況調査　教科・科目別分析と改善点（数学・数学Ⅰ）』, 2007.4, p.11
2) 国立教育政策研究所教育課程研究センター　前掲書, 2007.4, p.11
3) 伊藤伸也「２次不等式表現の翻訳・処理に関する調査結果　―解答困難な生徒の理解の様相―」『筑波数学教育研究　第21号』, 2002, pp.73-80
4) 国立教育政策研究所教育課程研究センター　前掲書, 2007.4, pp.13-14
5) 国立教育政策研究所教育課程研究センター　前掲書, 2007.4, p.10
6) 松本修身「高等学校数学科教育における教材・教具づくりに関する一考察 ―県下教員へのアンケート調査と数学科教育研修講座における取組をとおして―」『研究紀要第１１９集』, 兵庫県立教育研修所, 2009, p.34

資料1

シート1

(中学校)

2次方程式

① 2次方程式の解
・代入して成り立つか

② 因数分解による解き方

③ 平方根による解き方

④ 2次方程式の利用

(発展) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

関数 $y=ax^2$

① 2乗に比例する関数

② $y=ax^2$ の立式

③ $y=ax^2$ のグラフ

④ 変化の割合

⑤ xの変域とyの変域

⑥ 1次関数と $y=ax^2$

(高等学校)

2次方程式

① 2次方程式
・因数分解による解法
・平方根による解法

② 解の公式

③ 実数解の個数

④ 2次方程式の応用

2次関数

① 関数
・一次関数のグラフ、$f(a)$の定義
・定義域、値域
・最大、最小

② 2次関数とそのグラフ
・$y=ax^2$
・$y=ax^2+q$
・$y=a(x-p)^2$
・$y=a(x-p)^2+q$
・$y=ax^2+bx+c$

③ 2次関数の決定
・3元1次連立方程式

④ 2次関数の最大・最小
・定義域が制限されない場合
・定義域が制限された場合

⑤ 2次関数のグラフとx軸の共有点の個数
・$D=b^2-4ac$の符号と共有点の個数

⑥ 2次不等式
・1次関数のグラフと1次不等式
・2次関数のグラフと2次不等式
・x軸とグラフが接する場合
・x軸とグラフが共有点を持たない場合

⑦ 2次不等式の応用

資料２

平成２１年１０月実施　県立（　　　　　　　）高等学校　（　）年（　）組（　）番

I. 次の２次関数のグラフの頂点の座標を求めなさい．なお，計算過程も消さずに残しておきなさい．

(1) $y = 2x^2 - 1$

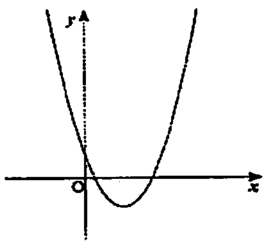
(2) $y = x^2 - 2x - 1$

(3) $y = -x^2 - 6x + 9$

(4) $y = x^2 - x + 1$

(5) $y = 3x^2 + 6x + 2$

II. ２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが下のグラフとなったとき，a，b，c，$b^2 - 4ac$ の符号が正，負，０のどれになるかを答えなさい．また，そう考えた理由も書きなさい．



a の符号：　，理由:

b の符号：　，理由:

c の符号：　，理由:

$b^2 - 4ac$ の符号：　，理由:

III. 次の不等式を解きなさい．なお，計算過程も消さずに残しておきなさい．

(1) $(x - 1)(x + 3) \geqq 0$

(2) $-x^2 + x + 6 > 0$

(3) $2x^2 - 7x + 5 > 0$

(4) $3x^2 + 7x + 3 > 0$

(5) $x^2 - 2x + 1 < 0$

IV. ２次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ の解が次のとき，２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフの概形を用いて x 軸との位置関係を図示しなさい．

(1) $\alpha < x < \beta$　　(2) $x < \alpha$，$\beta < x$　　(3) $x = \alpha$ 以外のすべての実数　　(4) すべての実数

x　　x　　x　　x