サイコロの形状による出る目の確率変動

数学班

0.定義

接地点…四角形や六面体が一点で接地しているときのその点
決定線・決定面…四角形や六面体においてその物体が制止したときに地面と一つの点も接しない辺または面のこと。サイコロでいう出た面を表す。

1.概要

サイコロの出目に関係する形状や質量の要因を解明し一般化することで、サイコロの出る目を操作できるようにする。最終的に出る目の確率を操作してサイコロを作成することを目標とする。

2.予備実験

【仮説】
図1のように、2次元で点Gを重心とする長方形の赤の辺が下を向き得る状況(A,B,C)を考えたとき、図1では、A,Cの状況ではつり合い、AからCの間の状況で赤の辺が下を向く。これは、

$$\text{確率[\%]} = \frac{\textbf{(重心から赤の辺の両端に向かって引いた2本の直線間の角度}}{\textbf{1}\text{周の角度}(=\boldsymbol{2\pi})}$$

となる。

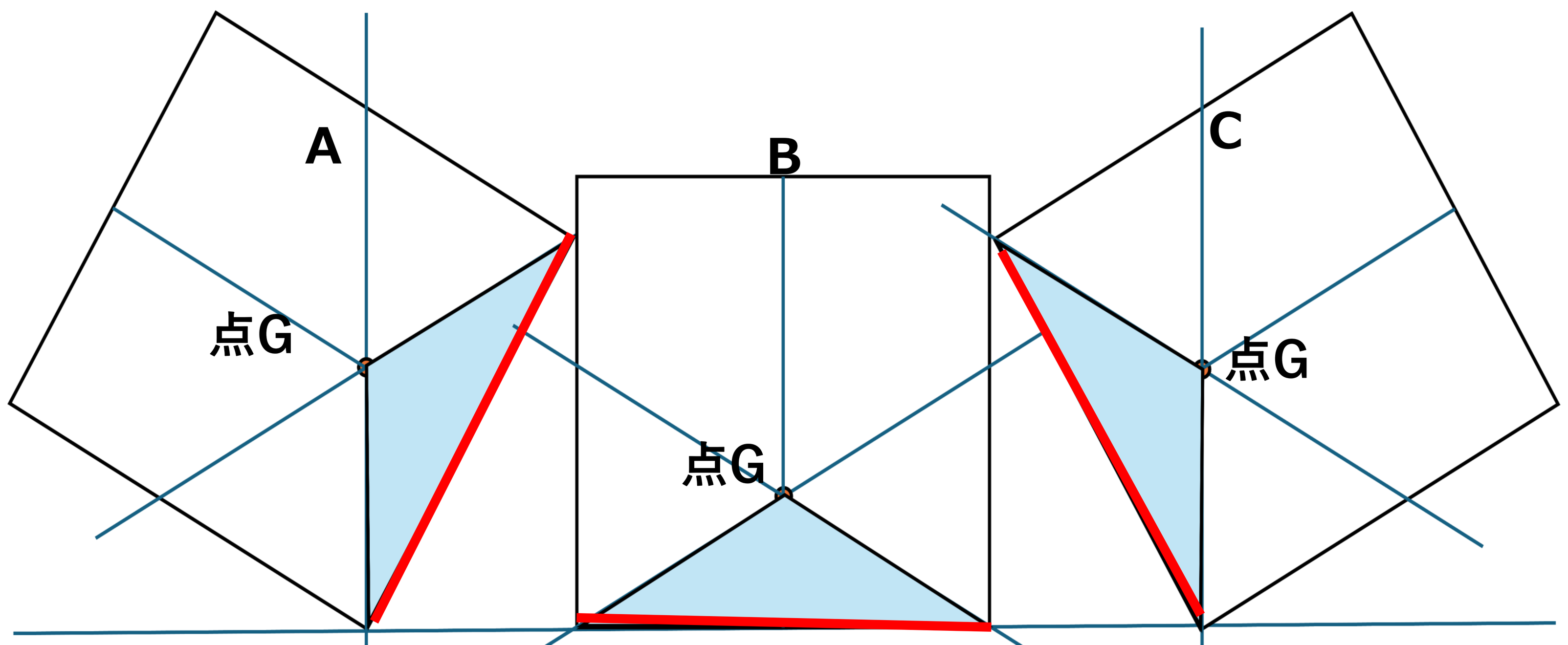


図1.平面で傾いた長方形が倒れるか、つり合うかどうかの図

【結果】 どの実験結果が先述した通りの確率が出た。

高さ	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
縦、横の長さ	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
角度	2.214297	2.060754	1.920141	1.792111	1.675962	1.570796	1.47563	1.389477	1.311391	1.240499	1.176005
理論値	0.704833	0.655958	0.6112	0.570447	0.533475	0.5	0.469708	0.442284	0.417429	0.394863	0.374334
実測値	0.679	0.652	0.592	0.549	0.537	0.499501	0.468	0.443	0.42	0.388	0.39

3.仮説と実験，考察

予備実験を3次元に拡張し、次の仮説を立てた。
【仮説】
できるだけ低い高さから落としたとき、重心からサイコロのそれぞれの面を見たときの立体角の比が確率の比となる。

【実験方法】
立体角とは
平面角(ラジアン)では、角の大きさをその角を作る半直線と単位円の交点が作る**単位円上の弧の長さ**で表した。
そこで、立体角(ステラジアン)では、角の大きさをその角を作る半直線と単位球の交点が作る**単位球上の面積**で表す。

頂点ABCD-PQRSで一辺の長さが2の図のような立方体のサイコロを考える。サイコロの中心を原点Oとし、x, y, z 軸の正の方向は面BCQR、PQRS、BCRS 方面とする。重心を点Gとする。

ここでは面ABCDに着目して記述する。
このとき、点A,B,C,D,Gの座標はそれぞれA(-1,-1,-1),B(1,-1,-1),C(1,-1,1),D(-1,-1,1),G(g_x,g_y,g_z)と表される。

まず、半直線GA,GB,GC,GD上のGからの長さが1の点をA',B',C',D'とする。これらの点はGを中心とした**半径1の球(単位球)上**にある。

これは、$\begin{cases}\overrightarrow{GA'} = k\overrightarrow{GA} \\ |\overrightarrow{GA'}| = 1\end{cases}$、$\begin{cases}\overrightarrow{GB'} = l\overrightarrow{GB} \\ |\overrightarrow{GB'}| = 1\end{cases}$、$\begin{cases}\overrightarrow{GC'} = m\overrightarrow{GC} \\ |\overrightarrow{GC'}| = 1\end{cases}$、$\begin{cases}\overrightarrow{GD'} = n\overrightarrow{GD} \\ |\overrightarrow{GD'}| = 1\end{cases}$と表される($k$,$l$,$m$,$n$は定数)。

(球面四角形A'B'C'D')=**(球面三角形A'B'C')**+**(球面三角形A'C'D')**であり、A',B',C',D'は**単位球**上の点であるから、球面四角形A'B'C'D'の面積は点Gから面ABCDを見たときの立体角である。

ここで、点A',B',C'における**球面**三角形の内角の大きさをそれぞれ、A', B', C'すると、**(球面三角形A'B'C'の面積)**=$A'+B'+C'-\pi$ と表される。

平面三角形 A'B'C'でA',B',C'の対辺をa', b', c'とする。また**平面**三角形GA'B'の辺B'C'(辺a')の対角をaとする。このとき、平面三角形GA'B'で内積の定義より

$\cos a = \overrightarrow{GB'} \cdot \overrightarrow{GC'}$、$\cos b = \overrightarrow{GC'} \cdot \overrightarrow{GA'}$、$\cos c = \overrightarrow{GA'} \cdot \overrightarrow{GB'}$が成り立つ。

また、球面三角法の余弦定理として

$\cos A' = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$、$\cos B' = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}$、

$\cos C' = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$が成り立つことが知られている。

ここで求めた余弦は逆関数を用いることでA', B', C'を求めることができるため、球面三角形A’B’C’の面積を求められる。また、同様に球面三角形A’C’D’の面積も求められ、球面四角形A’B’C’D’の面積、つまり立体角を求められる。

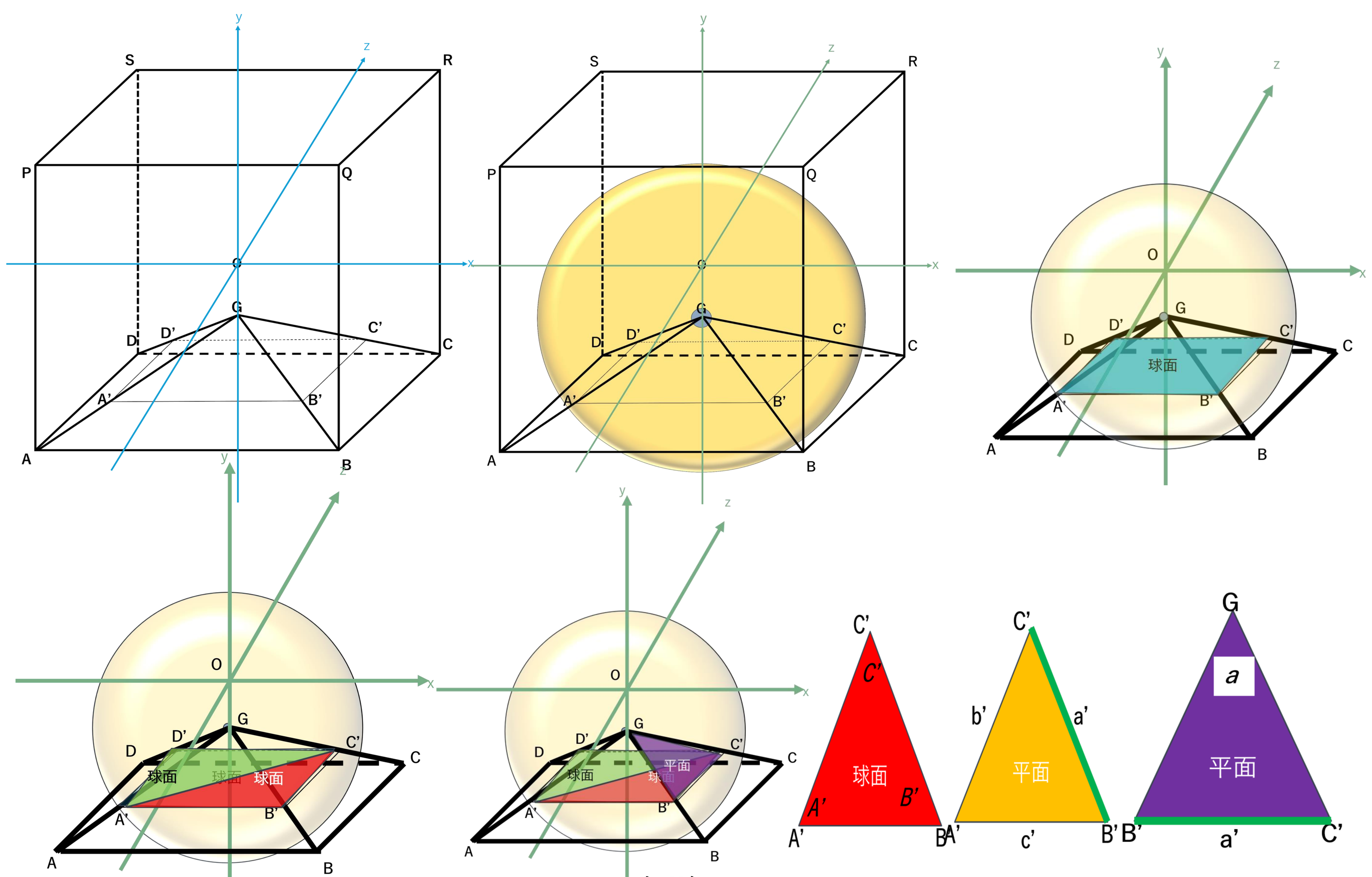


図2.実験過程の図

a)仮説による値

面	球面四角形の面積	確率[%]
ABCD(1)	3.709180872	29.516723530
ABQP(2)	1.901530714	15.131900626
DAPS(3)	1.901530714	15.131900626
BCRQ(4)	1.901530714	15.131900626
CDSR(5)	1.901530714	15.131900626
PQRS(6)	1.251066888	9.955673966
計	12.56637061	100

b)実験による値

面	回数	確率[%}
1	252	25.2
2	166	16.6
3	177	17.7
4	151	15.1
5	168	16.8
6	86	8.6
計	1000	100

表２.重心を1の方向に0.5ずらした一辺の長さが２の立方体

考察
仮説検定を行ったが、仮説が十分に有為であるという結論には至らなかった。その理由としては、まだ考慮に至っておらず、理論とそろえることができなかった条件が実験結果に影響を及ぼしてしまったからであると考えられる。

4. 今後の展望

・実験結果に基づいて，確率からサイコロの形状をデザインし，出る目の確率を操作してサイコロを作製する。
・サイコロを落下させる高さによる落下後のサイコロの挙動も考慮し，より現実に近い確率の変化について考察する。
・試行回数を増やし，より正確な値を基に確率の変化を考察する。
・重心の位置や形状を変化させたさいころを実際に作成する

5.参考文献

桐野和也.投影による身近な幾何学：地図とサイコロ. 広島大学. 2010.

サイコロの形状による出る目の確率変動

明野 員武　池田 稜悠　川西 裕斗　中山 優毅　林 颯馬　前田 陽喜

0.定義

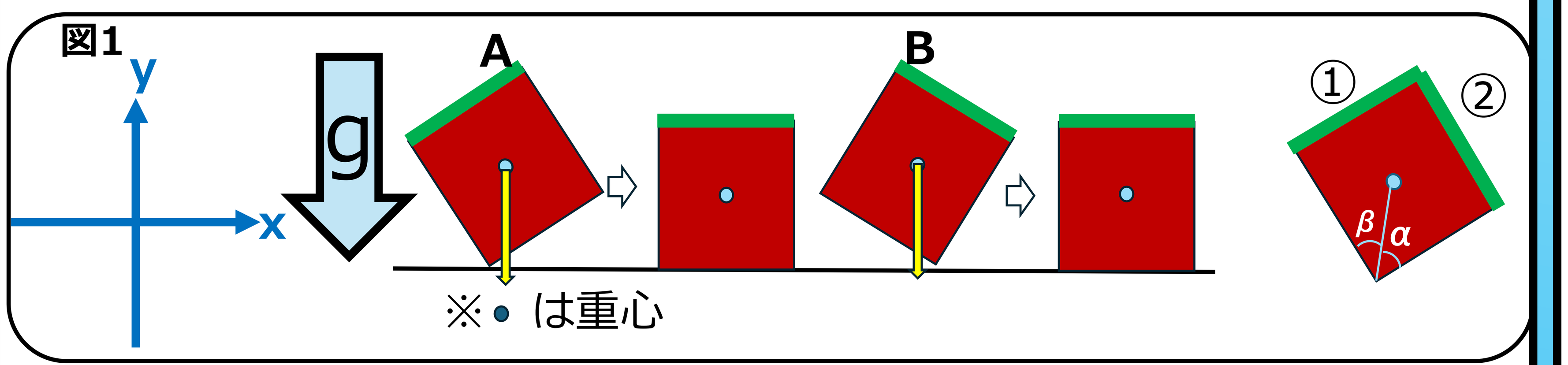
接地点…四角形や六面体が一点で接地しているときのその点
決定線・決定面…四角形や六面体においてその物体が制止したときに地面と一つの点も接しない辺または面のこと。サイコロでいう出た面を表す。
立体角…『3.仮説と実験、考察』に定義を記す。

1.概要

サイコロの出目に関係する形状や質量の要因を解明し一般化することで、サイコロの出る目を操作できるようにする。最終的に出る目の確率を操作してサイコロを作成することを目標とする。

2.予備実験

【仮説】
参考文献「投影による身近な幾何学：地図とサイコロ」より、図1の状況で、y軸の負の方向に重力が働くxy平面上で、長方形がある１点で地面と接地している(図1-A,B)。回転モーメントが影響を与えない時、長方形の重心が接地点より左右のどちらにあるかで、その重心がある側に転ぶ。つまり重心から垂線を下ろしたときにその垂線が通る面が初めに着地する。
①が出る確率：②が出る確率＝α：βになると考えられる。



【結果】 どの実験結果が先述した通りの確率が出た。

高さ	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
横の長さ	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
理論値	0.704833	0.655958	0.6112	0.570447	0.533475	0.5	0.469708	0.442284	0.417429	0.394863	0.374334
実測値	0.679	0.652	0.592	0.549	0.537	0.499501	0.468	0.443	0.42	0.388	0.39

3.仮説と実験，考察

2次元において、α,βの比が接地点Oを中心とした円弧の長さの比と一致するから、重心から下した垂線が弧をα：βに内分する点をAとして、弧α,βとどちらと交わるかによって決まるといえる。
ここで、この考え方を三次元に拡張する。
このとき、重心を中心とした球を考えて、中心から直方体の各面上の点ｐとの交点の面積の比、つまり重心周りの立体角の比によって確率が変わると考えられる。

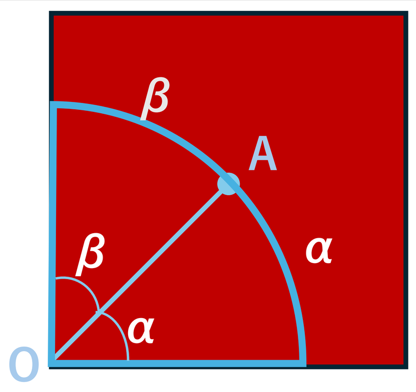
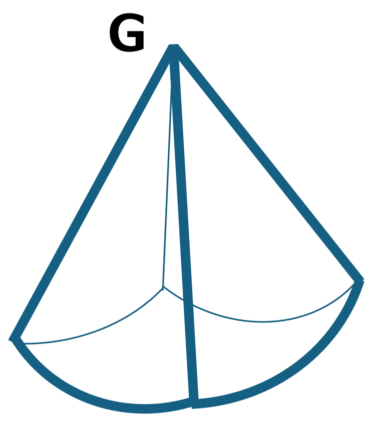
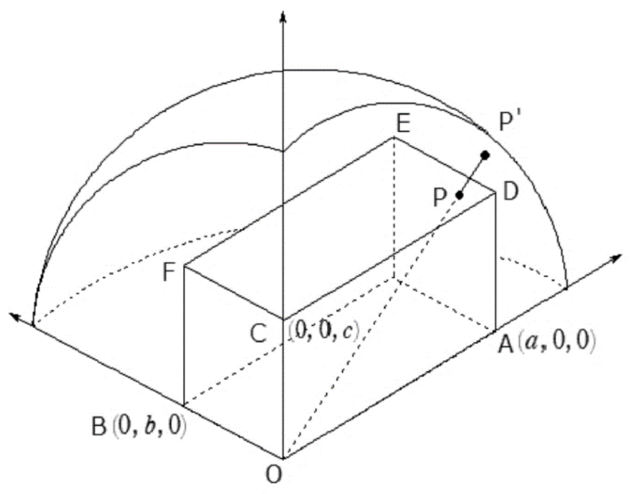


図2　中心角と比





・立体角
立体角とは，球面上のある部分の面積に対し，球の中心からどの程度の広がりを持つかを表現する量である。

球面上の部分の面積をS、球の半径をrとするとき、立体角Ωの大きさは

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

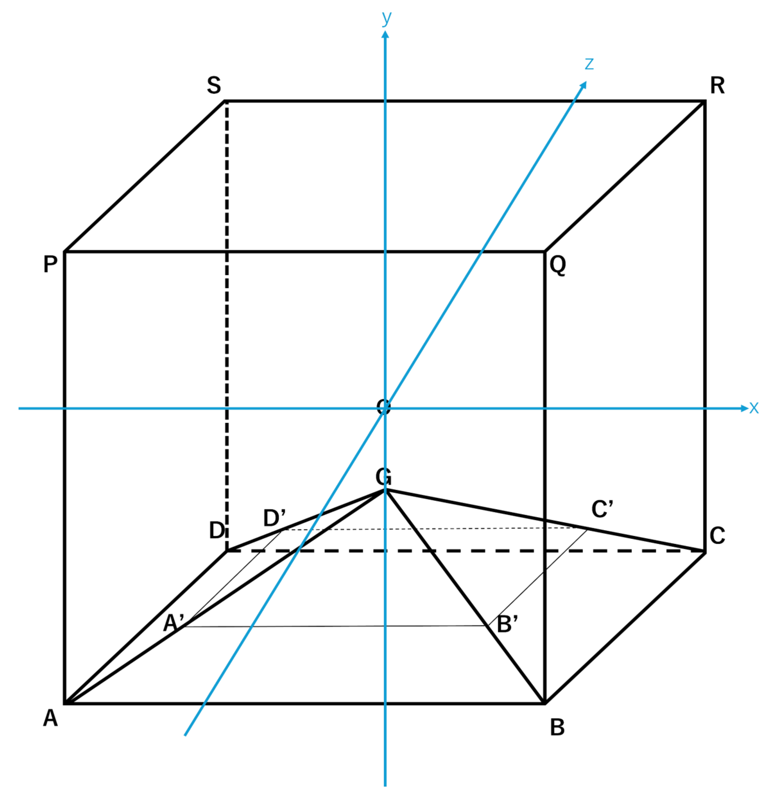
すなわち、**単位球面上(r=1)の面積がそのまま立体角**となる。

【仮説】
できるだけ低い高さから落としたとき、重心からサイコロのそれぞれの面を見たときの立体角の比が確率の比となる。

【実験方法】
頂点ABCD-PQRSで一辺の長さが2の図のような立方体のサイコロを考える。
サイコロの中心を原点Oとし、x, y, z軸の正の方向は面BCQR、PQRS、BCRS 方面とする。重心を点Gとする。

ここでは面$ABCD$に着目して記述する。
このとき、点A,B,C,D,Gの座標はそれぞれA(-1,-1,-1),B(1,-1,-1),C(1,-1,1),D(-1,-1,1),G(g_x,g_y,g_z)と表される。
まず、半直線GA,GB,GC,GD上のGからの長さが1の点をA',B',C',D'とする。これらの点はGを中心とした**半径1の球(単位球)上**にある。

これは、$\begin{cases}\overrightarrow{GA'} = k\overrightarrow{GA} \\ |\overrightarrow{GA'}| = 1\end{cases}$、$\begin{cases}\overrightarrow{GB'} = l\overrightarrow{GB} \\ |\overrightarrow{GB'}| = 1\end{cases}$、$\begin{cases}\overrightarrow{GC'} = m\overrightarrow{GC} \\ |\overrightarrow{GC'}| = 1\end{cases}$、$\begin{cases}\overrightarrow{GD'} = n\overrightarrow{GD} \\ |\overrightarrow{GD'}| = 1\end{cases}$と表される
(k,l,m,nは定数)。
このとき球面上で二点A'B',B'C',C'D',D'A'を最短の長さで結んでできる図形を**球面**四角形という。
(球面四角形A'B'C'D')=(球面三角形A'B'C')+(球面三角形A'C'D')であり、A',B',C',D'は単位球上の点であるから、球面四角形A'B'C'D'の面積は点Gから面ABCDを見たときの立体角である。
ここで、点A',B',C'における**球面**三角形の内角の大きさをそれぞれ、$A',B',C',$すると、**(球面三角形A'B'C'の面積)=A'+B'+C'-π**と表される。**平面**三角形A'B'C'でA',B',C'の対辺をa',b',c'とする。また**平面**三角形GA'B'の辺B'C'(辺a')の対角をaとする。このとき、平面三角形GA'B'で内積の定義より
$\cos a = \overrightarrow{GB'} \cdot \overrightarrow{GC'}$、$\cos b = \overrightarrow{GC'} \cdot \overrightarrow{GA'}$、$\cos c = \overrightarrow{GA'} \cdot \overrightarrow{GB'}$が成り立つ。
また、球面三角法の余弦定理として
$\cos A' = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$、$\cos B' = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}$、
$\cos C' = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$が成り立つことが知られている。
ここで求めた余弦は逆関数を用いることでA',B',C'を求めることができるため、球面三角形A′B′C′の面積を求められる。また、同様に球面三角形A′C′D′の面積も求められ、球面四角形A′B′C′D′の面積、つまり立体角を求められる。



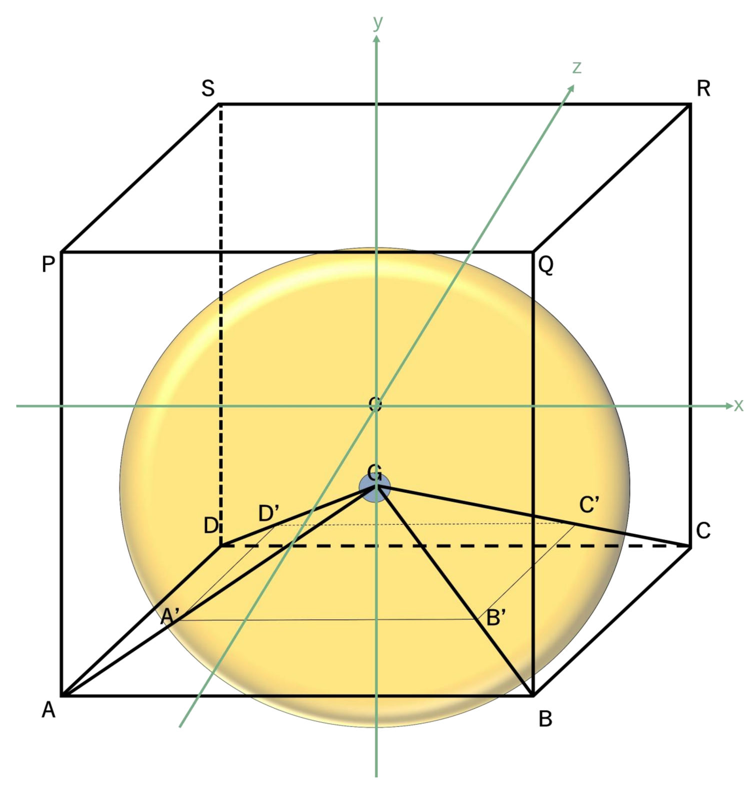


表２.重心を1の方向に0.5ずらした一辺の長さが２の立方体

a)仮説による値

面	球面四角形の面積	確率[%]
ABCD(1)	3.709180872	29.516723530
ABQP(2)	1.901530714	15.131900626
DAPS(3)	1.901530714	15.131900626
BCRQ(4)	1.901530714	15.131900626
CDSR(5)	1.901530714	15.131900626
PQRS(6)	1.251066888	9.955673966
計	12.56637061	100

b)実験による値

面	回数	確率
1	252	25.2
2	166	16.6
3	177	17.7
4	151	15.1
5	168	16.8
6	86	8.6
計	1000	100

考察
仮説と実験で近い数字を得ることができた。
仮説検定を行ったが、仮説が十分に有為であるという結論には至らなかったが、試行回数が少なかったので、今後は試行回数を増やしたい。

4. 今後の展望

・実験結果に基づいて，確率からサイコロの形状をデザインし，出る目の確率を操作してサイコロを作製する。
・サイコロを落下させる高さによる落下後のサイコロの挙動も考慮し，より現実に近い確率の変化について考察する。
・試行回数を増やし，より正確な値を基に確率の変化を考察する。
・重心の位置や形状を変化させたさいころを実際に作成する

5.参考文献

桐野和也.投影による身近な幾何学：地図とサイコロ. 広島大学. 2010.