

8の字跳びの数学的考察

兵庫県立加古川東高等学校 課題研究 数学班

目的や動機

ネット上の8の字跳びのコツは数学的・物理的な検証が不十分
→縄に入る位置と縄の角速度を数学的・物理的に考察する

前提条件

- [1]移動経路：跳び手が回し手2人の中点を通る直線
- [2]縄を回す向き：跳躍者が右側に来る回し手の視点で時計回り
- [3]縄の軌道：軌跡が球面を描き、縄は等速で回ると仮定する

仮説①

跳躍者は回し手に近い場所から縄に入る方がよい

検証①

縄の軌道の軌跡：中心(0,0,0) 半径 r の球面

回し手：2点 $(r, 0, 0), (-r, 0, 0)$

w 軸：跳躍者の進行方向を示した軸

ϕ ： w 軸と x 軸のなす角

点 $P(w, z)$ ：球面上かつ wz 平面上の任意の点

点 H ：点 P から xy 平面に下ろした垂線の足

点 H' ：点 H から x 軸に下ろした垂線の足 $\theta : \angle PH'H$

図1 (概形)

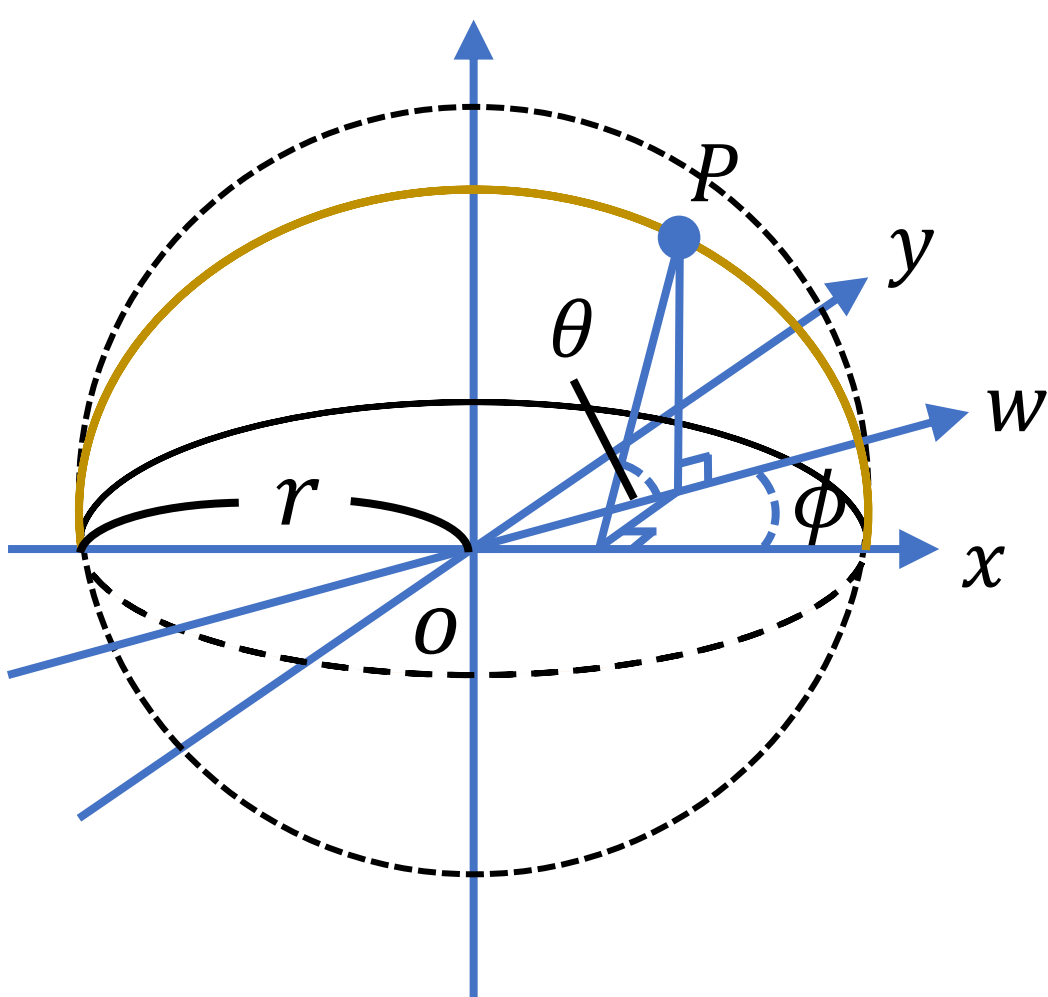
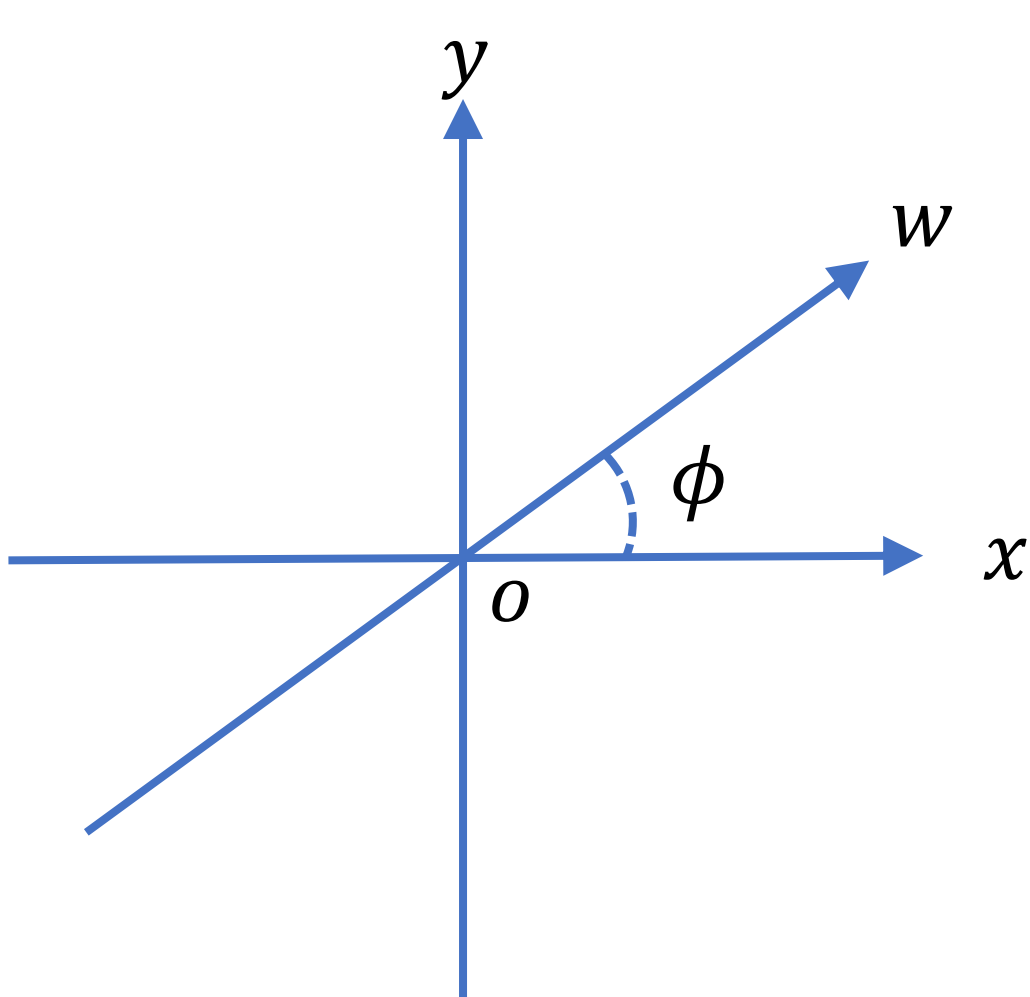


図2 (上から)



ϕ を決めると、 θ を動かしたときの wz 平面での点 P の動きが跳躍者が通る直線上における縄の動きに相当する

関数ソフトGeoGebraに求めた式を入力し、跳躍者の進行平面上での縄の動きを調べた

結果・考察①

ϕ が小さいとき、縄の速さが上下で速く、左右で遅い

よって、 ϕ が小さいとき、 ϕ が大きいときに比べて、

①縄に入るとき、目の前を通過する縄の速さが遅い

→理想に近いタイミングで入りやすい

②跳んでいる間に通過する縄の速さが速い

→少ない跳躍の時間で縄が通り過ぎる

よって、跳躍者は回し手に近いところから縄に入るほうがよい

仮説②

縄の角速度 ω について、跳躍者が引っかかりにくくなる最適な角速度が存在する

検証②－1

跳躍者が縄にかからない距離 d の最大値を調べる

跳躍者が初速度0、加速度 a の等加速度直線運動をしているときについて調べる

T ：縄の周期 h ：跳躍者の身長 R ：縄の半径

r ：図4の円の半径 $\lambda : h = R + r \sin \lambda$ を満たす

図3 (上から)

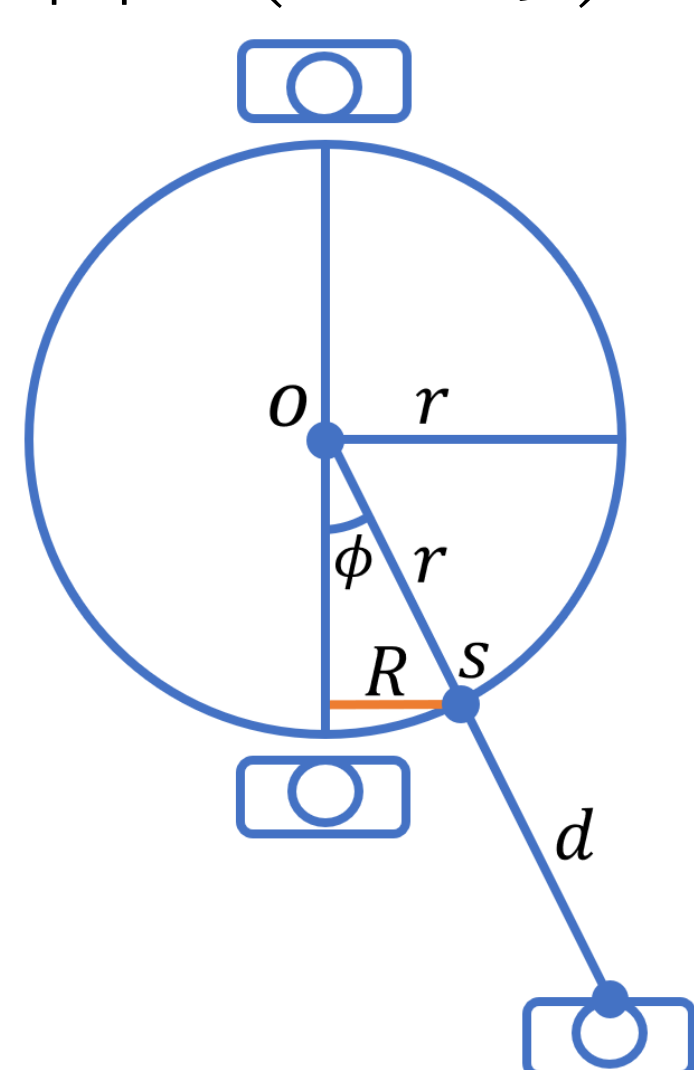
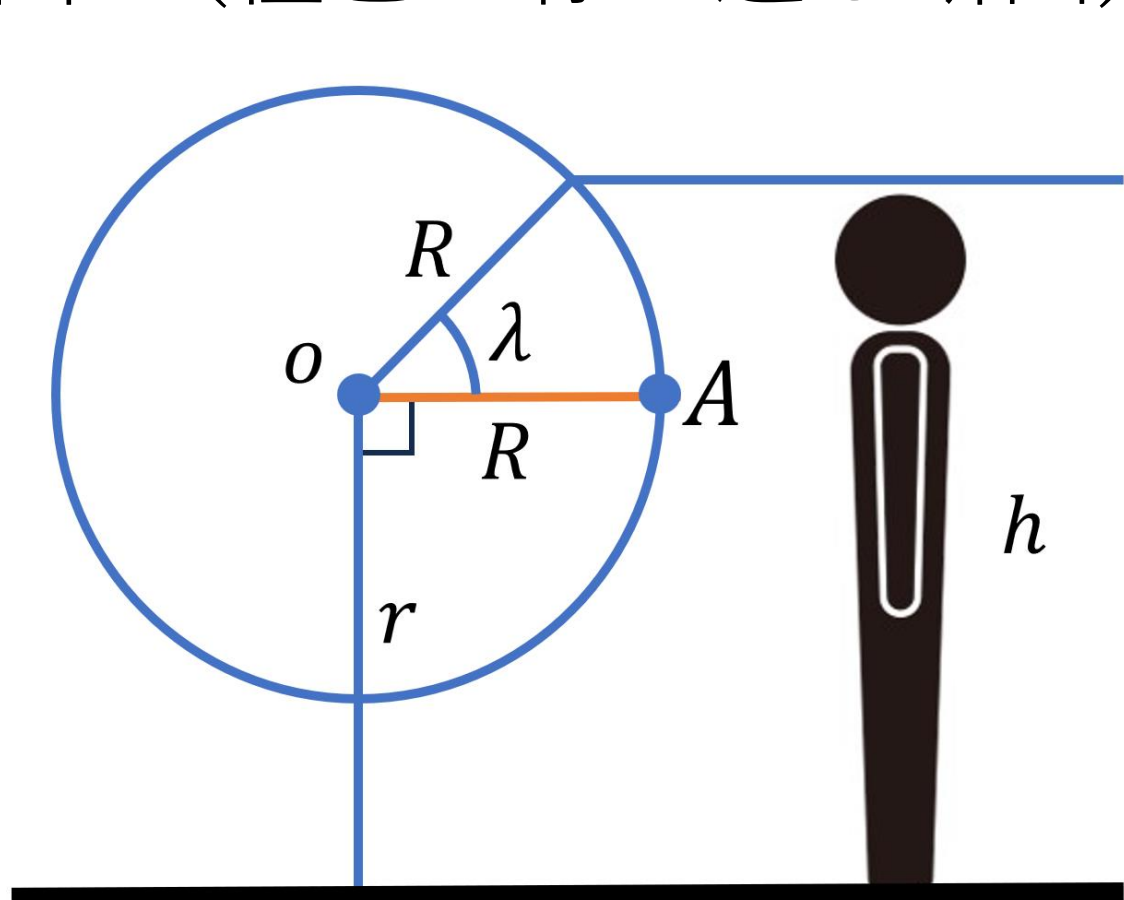


図4 (橙色の線を通る断面)



跳躍者が、縄が点 A に来ると走り出すと仮定し、縄が $\frac{5}{4}$ 周し足元に来る前に跳躍者が点 o にたどり着く条件、跳躍者が縄に当たる前に縄の内部に入る条件を求めた

検証②－2

人が跳躍をするときに縄にかからない条件を調べる

跳躍者は速さ v で運動し、跳躍は斜方投射と考える

跳躍者が地面を離れたとき縄は点 P にあるものとする

t_0 ：跳躍している時間

t_1 ：跳躍者が跳び始めた時間から、縄が跳躍者が着地する地点まで動く時間

α ：縄が $-\frac{w}{2}$ から $\frac{w}{2}$ まで動くときの動径

β ：跳躍のときに跳びあがる角

γ ：図7に表された角

t_0 、 t_1 を他の文字を使って、表すことにより、跳躍している間に縄が跳躍者の下を通過する条件を求めた

図5 (横から)

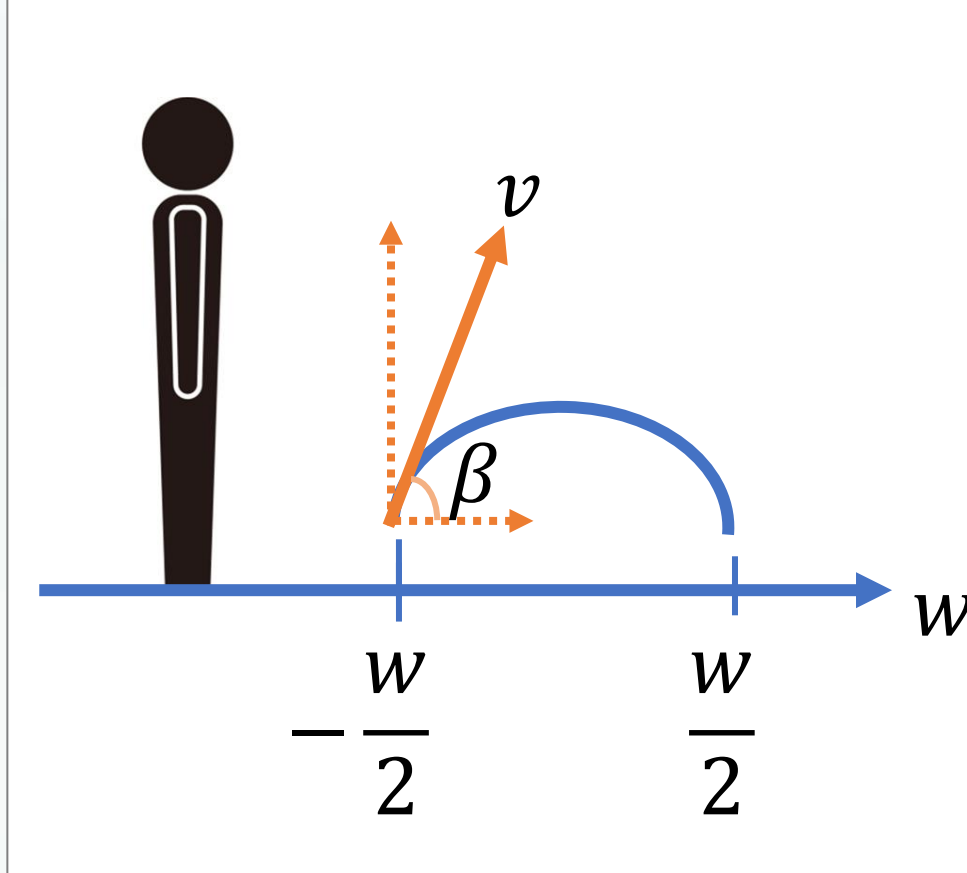


図6 (上から)

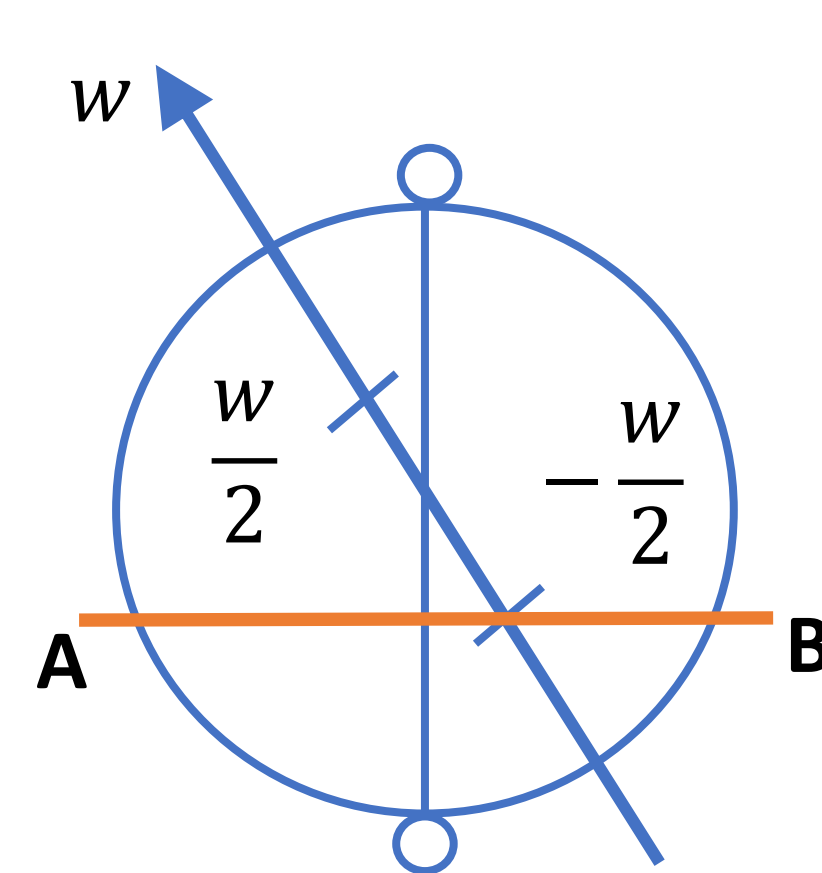
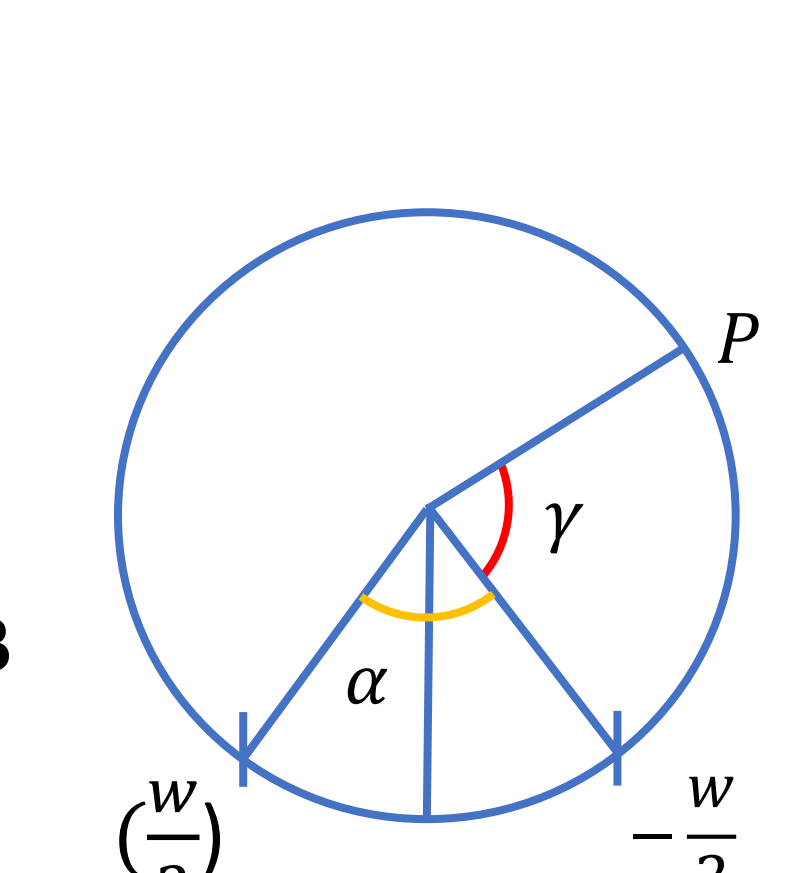


図7 (断面図AB)



結果・考察②

検証②－1

ω 以外の変数：ある程度の値の範囲に定まる

→ ω と d が満たすべきのおおよその条件が求まる

よって、実測値などを用いて跳躍者の d の値を測る

→ ω がとるべき範囲が定まる

検証②－2

γ が $\frac{\pi}{2}$ に近いとき、 ω が満たすべき条件が求まった

また、実測値より γ は $\frac{\pi}{2}$ に近いことが分かった

→ ω のとるべき範囲が定まる

今後の展望

〈1〉実際の軌道に近い方程式による検証

〈2〉実際の8の字跳びでの結果確認

検証時の計算

検証① $y = \sqrt{r^2 - x^2} \cos \theta$ $z = \sqrt{r^2 - x^2} \sin \theta$

$\tan \phi = \frac{y}{x}$ $w = \sqrt{x^2 + y^2}$ より、

$P(w, z) = \left(\frac{r \cos \theta}{\cos \phi \sqrt{\tan^2 \phi + \cos^2 \theta}}, \frac{r \tan \phi \sin \theta}{\sqrt{\tan^2 \phi + \cos^2 \theta}} \right)$

検証②－1

縄が足元に来る前に跳躍者が点 o にたどり着く条件

$\sqrt{\frac{2(d+r)}{a}} < \frac{5}{4}T$ より、 $d < \frac{25}{32}aT^2 - r \Leftrightarrow d < \frac{25}{8}\pi^2 \frac{a}{\omega^2} - r$

縄に当たらずに縄の内部に入る条件

$\sqrt{\frac{2d}{a}} < \frac{2\pi - \lambda}{\omega}$ より、 $d < \frac{a(1 - \frac{\lambda}{2\pi})^2}{2}T^2 \Leftrightarrow d < \frac{(2\pi - \lambda)^2}{2\omega^2}a$

検証②－2

$t_1 < t_0$ $t_0 = \frac{2v \sin \beta}{g}$ $t_1 = \frac{\alpha + \gamma}{\omega}$

$\sin \alpha = \frac{w \sin \phi}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{v^2 \sin \beta \cos \beta \cos \phi}{g} \right)^2}}$

$\alpha \approx 0$ なので、 $\alpha \approx \sin \alpha$ より、

$\omega > \frac{\sin \alpha + \gamma}{t_0}$

参考文献

・西沢 尚之、メイツ出版、2018、基本から大会まで 勝つ！長なわ 8の字跳び 最強のコツ