

『 $\frac{1}{f}$ ゆらぎの世界～カオスとフラクタル～ 』

兵庫県立神戸高等学校 総合理科学コース 3 学年
 秋山 慧 上田 智翔 北川 賢伸 新澤菜里子
 二四岡 健 則武 治樹 埴岡 俊介

天地創造以前の世界の状況をカオス (混沌) と呼ぶなら、カオスは万物の、すべての活力の源といえる。数学や物理の領域の“カオス”は、定められたある条件のもとで経過した後の状態が、予想もできない不規則な現象となって現れてくることを意味する。しかし、意外にもカオスの中には秩序や法則性が存在し、カオスの離散力学系のプロセスをたどるとフラクタル (自己相似形:全体がそのいくつかの縮小形で構成される) が現れる。さらに予測がある程度できながら、完全には予測できない「ゆらぎ」へと研究対象は広がる。これらを背景に、数学的に 音楽・文学・芸術分野へアプローチしてみる。

1. 音楽・文学と数学・物理の融合；

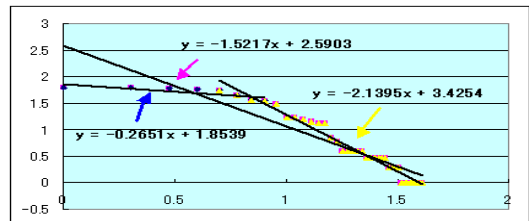
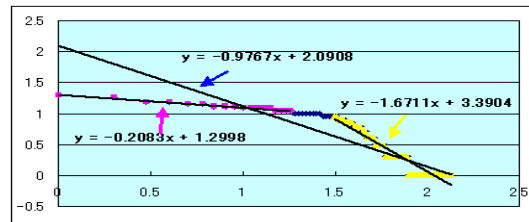
『〈研究テーマ①〉 騒音と音楽は、何が違い、何故人は騒音と音楽を聞き分けることができるのか』

音楽の特徴は、音響振動の振動数 (音の高低=周波数) と振幅 (音の強弱) で構成され、音楽の特徴をよく表しているのは周波数のゆらぎで、その瞬時的周波数が $1/f$ ゆらぎをするものを研究対象にする。では「 $1/f$ ゆらぎとは何か？」そこで、まず興味を引いたのは“熱雑音”という現象である。ラジオやテレビに使われているトランジスタは、半導体でできていて、半導体の中の電子の動きを使って、放送局から送られる電波信号を増幅している。信号が弱くなると自動的に信号の増幅率を大きくする働きもする。放送終了後にスイッチを入れたままにしておくと、トランジスタは何も電波信号が来ないため、増幅回路の増幅率が最大限に大きくなり、回路の中に発生する雑音だけが大きく増幅されて、ザーンという音が流れることになる。これは“熱雑音”と言われ、熱雑音のパワーは、抵抗の値と温度に比例するが、このパワーを調べると、半導体の抵抗の値が $1/f$ ゆらぎをし、それに電流を流すと、電圧が $1/f$ ゆらぎをすることが知られている。そこで、私たちは抵抗値を実測するのではなく、空のビデオテープのノイズ画面 (砂嵐) を画像処理し、2 値変換し、白・黒の関係性を調べることにする。ここで、どのようにして白と黒に判別されているかという、熱雑音の電圧の変化で、電圧が高ければ白、低ければ黒というふうに映像に反映される。

考察 実験結果によると、TVの砂嵐の画面の白い点に $1/f$ ゆらぎの要素が含まれていると考えられる。また黒い点には、ローレンツ型スペクトル (高い周波数は $1/f^2$ に減衰し、低い周波数では白色) とも近似しているように観察できる。この黒い点が $1/f$ ゆらぎしているとは言えない原因は、灰色の認識を 2 値変換する過程で、全体のグラデーションが黒色よりであるため、黒に多くカウントされた結果と考えられる。視覚的にとらえた砂嵐の画面の画像解析のグラフから $1/f$ ゆらぎの要素が潜んでいると考えられる。

- 〈図 1〉 (1) 白・黒の個数の各々をその平均値との比をとり、比の二乗を計算する。
 (2) その出現個数の多い方から点をプロットする。
 (3) 縦軸に出現個数の常用対数、横軸に順番の常用対数のグラフを描く。

【〈上図〉 白のグラフ / 〈下図〉 黒のグラフ】



この“熱雑音”の中に潜む $1/f$ ゆらぎは生命の本質であり、非常に普遍的に見られる現象である。身近な例の一つとして私たちの生体リズムが $1/f$ ゆらぎしている。例えば、心拍数の心拍間隔の平均値からのずれを考える。平穏な生活のときはおおむね心拍間隔は安定しているのですが、運動したり、お酒を飲んだりすると変化してくる。その平均値からのずれをゆらぎとして、両対数グラフ化すると傾き -1 の直線に近似できそれを $1/f$ ゆらぎという。この体内に潜む $1/f$ ゆらぎシステムと私たちの感覚とがシンクロして、音楽を聴いて心地よいと感じられる。

『〈研究テーマ②〉 ある数学的論理を根拠にし、そこにある種の規則性を取り入れて作った曲は、解析して $1/f$ ゆらぎをもつ曲となりうるか？ さらに、 $1/f$ ゆらぎを含む曲は、多くの人にとって快適な音楽となりうるか？』

そこで私たちは以下の 3 つのアプローチを試みた。

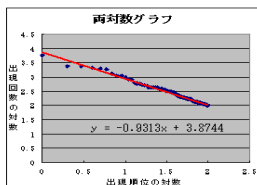
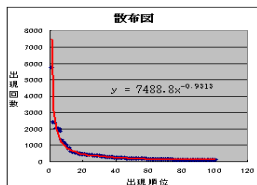
(I) 英文学における“ジップの法則”と黄金比 ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; 循環しない小数) を組合わせて作曲する方法;

まず“ジップの法則”とは何かというと「**英文中で出現頻度が n 番目の単語は、出現頻度が 1 番目の単語の $1/n$ の確率で現れる**」

□村上 春樹氏の作品の中で最も広く海外で読まれている『*A Wild Sheep Chase*(羊をめぐる冒険)』を対象にした。総単語数は 88,119 語でその出現頻度上位 100 語を抽出して見ると〈図 2〉に示すように“ジップの法則”は言えることがわかる。

〈図 2〉

抽出単語											
1	the	5760	26	from	387	51	your	191	76	say	125
2	i	2414	27	one	379	52	over	188	77	can	125
3	a	2391	28	have	379	53	know	186	78	came	125
4	to	2072	29	there	374	54	when	182	79	just	124
5	of	2014	30	this	356	55	don't	179	80	same	123
6	and	1871	31	her	334	56	only	176	81	went	119
7	in	1295	32	like	326	57	right	175	82	took	118
8	was	1168	33	so	323	58	they	174	83	id	118
9	it	1114	34	we	304	59	got	164	84	three	116
10	you	993	35	were	300	60	would	164	85	did	114
11	that	815	36	if	298	61	off	163	86	rat	114
12	my	806	37	man	287	62	get	160	87	around	113
13	with	619	38	what	286	63	after	154	88	things	112
14	said	614	39	about	278	64	more	149	89	why	110
15	sheep	577	40	then	272	65	that's	148	90	still	110



《音楽作成の方法》ジップの法則が成り立つ英文の単語の抽出順番に黄金比の数を用いる。例えば、黄金比は 1.618033988... であるが、(1 番目) 小説の 1 番目の単語、(2 番目) 小説の $1+6=7$ 番目の単語、(3 番目) 小説の $1+6+1=8$ 番目の単語... という風に。次に、選んだ単語の $a\sim z$ にそれぞれ $1\sim 26$ の数字を当てはめ、ピアノには半音階でド (C) ~ 2 オクターブのド (C) に、それぞれ $1\sim 25$ の数字を当てはめる。そして、各単語を構成している文字の数字を足し、それを 25 (作曲に使用する鍵盤の数)+ 1 (休符) = 26 で割り、余りの数を鍵盤に当てはめた数字と対応させて音を決定する。なお、余りが 0 の場合は休符とする。

〔例〕英単語 *the* : $t(20) + h(8) + e(5) = 33$ で、 $33 \div 26 = 1$ 余り 7 だからファ # (*Fis*) である。

《音の長さの決定方法》使用する音符は、全音符、付点 2 分音符、2 分音符、付点 4 分音符、4 分音符、8 分音符、16 分音符の 7 種類とし、それぞれに $0\sim 6$ までの数字を当てはめる。各単語の文字数を 7 で割った余りで音の長さを決定する。

〔例〕英単語 *the* : $3(\text{文字}) \div 7 = 0$ 余り 3 だから付点 4 分音符である。

このようにして 1 つの単語から 1 つの音を決定し、それらを並べて作曲する。

〔考察〕私たちは自由意志によって言葉を用い、単語の出現頻度などいっさい気にしていないが、ジップは言葉の中に法則性をみつけた。その法則に循環しない無限小数を関連づけると村上春樹氏の小説がどのような曲を奏でるか興味がわき早速作曲にとりかかった。果たしてどのような冒険であったのか？

(II) 世の中には $1/f$ ゆらぎが至る所に潜んでいる。そこで次に $1/f$ ゆらぎを作為的に作成することを試みた。使用するのは、サイコロと 2 進数である。

〈サイコロの振り方のシステムの説明〉

サイコロ 3 個 (A, B, C とする) とし、その A, B, C に 2 進数の 0 または 1 を当てはめ (A, B, C) = $(0, 0, 1)(0, 1, 0)(0, 1, 1)(1, 0, 0)(1, 0, 1)(1, 1, 0)(1, 1, 1)$ の 7 個を 1 クールとし、以後これを繰り返す。

《音楽作成の方法》○: 振り直す, ×: 振り直さない

2 進数	A	B	C	2 進数	A	B	C
(0, 0, 1)	×	×	○	(1, 0, 1)	○	×	○
(0, 1, 0)	×	○	×	(1, 1, 0)	○	○	×
(0, 1, 1)	×	○	○	(1, 1, 1)	○	○	○
(1, 0, 0)	○	×	×	*	*	*	*

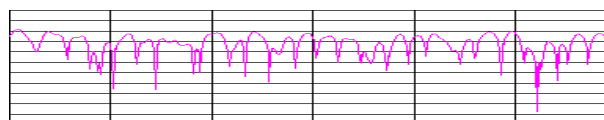
この操作を繰り返し、サイコロの合計の数字を音に当てはめることによって、作曲を試みた。このシステムを採用したポイントは 2 進数である。サイコロという全くの乱数発生装置に、2 進数という新たな要素を加えることで、サイコロの目の合計の動きを小から大にすることができる。

《音の長さの決定方法》サイコロの目の数の合計は $3\sim 18$ なので下のような表を作り、サイコロを 1 回振る毎に列を 1 つずつずらす。それにより、6 回の操作で 1 周期のリズムパターンは生まれる。そうすることで一見ランダムだが、実は周期性のある音のリズムパターンを作成した。

音符	16 分	8 分	付点 8 分	4 分	付点 4 分	2 分
和の合計	3	4	5	6	7	8
和の合計	9	10	11	12	13	14
和の合計	15	16	17	18	*	*

〔考察〕サイコロのランダム性の中に規則性を入れゆらぎを含んだ曲を作成し、フーリエ解析を用いて研究してきた。 $1/f$ ゆらぎをもった自己相似形の感じられる曲になったが、研究はまだ途中で、結論らしきものはまだ発見できてない。途中で現れた白色雑音とは異なる $1/f$ ゆらぎ波形を〈図 3〉に示す。

〈図 3〉



(Ⅲ) 数式処理システム“Mathematica”で、
音のリストを作成し、自動作曲を試みる方法;

□サンプルとして使用した数は、脈拍・最高血圧・
最低血圧・円周率・有理数 $1/19$ ・自然対数の底 e ・友
愛数・巨大メルセンヌ素数 $2^{13466917} - 1$ ・黄金比

《音楽作成の方法》

①最初に、「音階」を設定する。(ここではハ長調
の音階で、変更可能) 正弦波の周波数を変化させ、ド
レミファ…に相当する音を作る。次に、この周波数を
並べた数列を作る。ここでは音名だけ示す。

{onkai} ; do, do, re, re, mi, mi, fa, fa, fa,
so, so, so, ra, ra, si, si, do2, do2

{onkai} の第 m 項を $onkai[[m]]$ とする。(m は 1~18)

②サンプルをこの音階数列に対応させる。

[例] 円周率 π の場合 ; $p = 3.14159265358979\dots$
を最初から 2 桁ごとに区切り、

{p} : 31, 41, 59, 26, 53, 58, 97, … と数列を定義する。

この数列の各項の値を 18 で割り、さらにそれぞれに
1 を足した数列を新たに {p'} とする。

{p'} : 14, 6, 6, 9, 18, 5, 8, 4, 6, 13, 9, 11, 16, 12, 10, 6, 3, 17

{p'} の第 n 項を $p'[[n]]$ とする。

③ここで、②の $p'[[n]]$ の値を①の m に代入する。

$p'[[n]]$ が m と同じ変域にするためである。

$onkai[[p'[[1]]], onkai[[p'[[2]]], \dots, onkai[[p'[[18]]]]$

これを順番に Mathematica で演奏させていく。

④ Mathematica で音を鳴らす基本的な命令は

$Play[Sin[f 2Pi t], \{t, 0, 1\}]$ で、

f は周波数, t は音が鳴る時間 (ここでは 1 秒)

$$\left\{ \begin{array}{l} Play[Sin[onkai[[p'[[1]]]] 2 Pi t], \{t, 0, 1\} \\ Play[Sin[onkai[[p'[[2]]]] 2 Pi t], \{t, 0, 1\} \\ \dots\dots\dots \\ Play[Sin[onkai[[p'[[18]]]] 2 Pi t], \{t, 0, 1\} \end{array} \right.$$

⑤サンプルの組合せで、次の 3 つのパターン
が和音として調和のとれた曲になった。

1) $e^{i\pi} + 1 = 0$ で密接に結びつく π と e ;

自然対数の底 e で、上記の①~④で {q'} を作り

$onkai[[p'[[1]]]]$ と $onkai[[q'[[1]]]]$,
 $onkai[[p'[[2]]]]$ と $onkai[[q'[[2]]]]$

…という様に、同じ値に対する 2 つの音
を同時に鳴らすことで和音にする。

2) 友愛数同士 (2 つの自然数 m, n があって、
 n の除外約数の和を $S(n)$ と書くとき
 $S(m) = n, S(n) = m$ で定義する)

この友愛数の小さい順から 18 組を考える。

[例] {220, 284}{1184, 1210}{2620, 2924}…

友愛数で、上記の①~④で {q'} を作り

$onkai[[p'[[1]]]]$ と $onkai[[q'[[1]]]]$,
 $onkai[[p'[[2]]]]$ と $onkai[[q'[[2]]]]$

…という様に、同じ値に対する 2 つの音
を同時に鳴らすことで和音にする。

3) 巨大メルセンヌ素数 $2^{13466917} - 1$ と黄金比。
作曲方法は 1), 2) と同様である。

■ 1)~3) に Do 文を用いて Mathematica に
自動的にサウンドを生成させる事が可能になった。

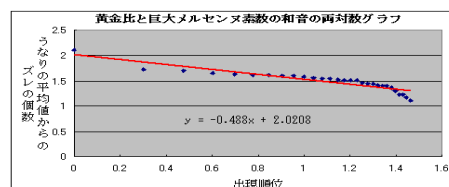
(注) また人体に関するサンプル (最高血圧・
最低血圧・脈拍) を用いた和音は不協和音
が多く聞かれた。

考察 作った曲が $1/f$ ゆらぎを示すかどうか検
証した。サンプルには“黄金比と巨大メルセンヌ素
数 $2^{13466917} - 1$ ”を使った。音楽において従来 $1/f$ ゆ
らぎを検証する際、縦軸に音楽のパワースペクトル、横
軸に周波数をとるのが一般的だが、今回我々は、音の
周波数のみを手がかりに、音の高さのバランスが与
えるメロディーの変化に注目しデータを解析した。

その際、縦軸には順次にならず和音のうなりの平
均値に対する比の 2 乗、横軸にうなりの出現頻度順
位をとりグラフ化してみた。

近似直線の傾きをみると約 -0.5 で $1/f$ に関連
づけることは難しい。これは我々の音階作りの規則
が 1 オクターブの中に収まっていることが大きく影
響しているようであり、さらに音の強弱の要素を無
視できないことを裏付けているといえそうである。
規則性の中にランダムさを考慮して作成した音楽の
中にとても心地よく聞こえる曲ができていることを
考えると、さらなる工夫と視点を考えることで興味
深い法則が潜んでいると予想される。今後の $1/f$ ゆ
らぎの音楽作りの課題である。

〈図 4〉【黄金比とメルセンヌ素数の和音のゆらぎ】



2. 芸術と数学・物理の融合；

『〈研究テーマ③〉カオス漸化式と呼ばれているものに熱雑音 (1/f ゆらぎを含むデータ) を代入すると、漸化式の描く図形はどのように変化していくか』

『漸化式に潜むゆらぎの影響の視覚化』

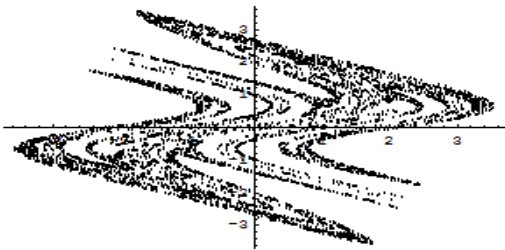
■まず、 f : x 軸方向の ($-a$) のずれ、 g : x 軸方向の b 倍の拡大 (縮小)、 h : 原点 O の回りの (-90°) の回転とするき、次の 3 つの合成変換 $f(g(h))$ を表わす行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ と非線形項を加える変換により}$$

構成される以下の三種の漸化式、およびそれらによって描かれる図形を考察の対象とする。

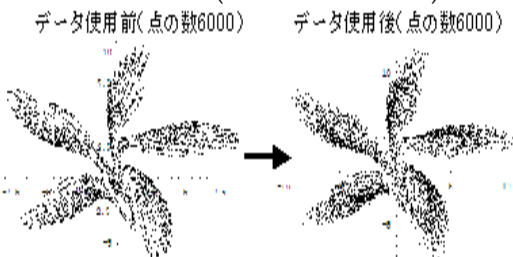
(I) 流水のような漸化式

$$\begin{cases} x_0 = 1.0, & y_0 = 0.0 \\ x_{n+1} = x_n - 0.81y_n - \frac{5.0}{1+(x_n)^2} x_n \\ y_{n+1} = -x_n \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.81 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5.0}{1+(x_n)^2} x_n \\ 0 \end{pmatrix}$$



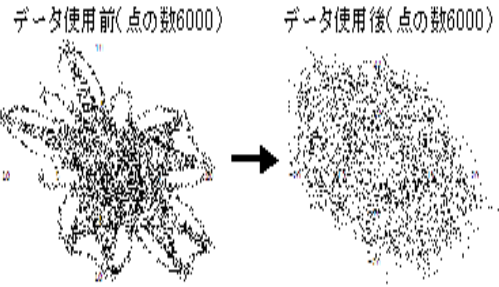
(II) 翼のような漸化式

$$\begin{cases} x_0 = 1.0, & y_0 = 0.0 \\ x_{n+1} = -1.57x_n + 0.96y_n - 4 + \frac{5.0}{1+(x_n)^2} \\ y_{n+1} = -x_n \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.57 & 0.96 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 + \frac{5.0}{1+(x_n)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$



(III) 花びらのような漸化式

$$\begin{cases} x_0 = 4.0, & y_0 = 0.0 \\ x_{n+1} = 0.77x_n + y_n + \frac{5.0}{1+(x_n)^2} \\ y_{n+1} = -x_n \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.77 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5.0}{1+(x_n)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$



■上記の (I)~(III) の各漸化式の 1 次変換を表わす部分の行列を A_1, A_2, A_3 とおく。その部分の特徴 (固有値) を調べると共に、非線形項を含むベクトルの (1,1) 成分の分子の * の部分に砂嵐の実験データを代入することで図形がどのように変化するかを視覚的に観察した。

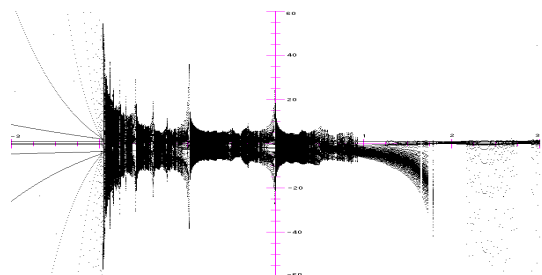
$$(I) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.81 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (II) A_2 = \begin{pmatrix} -1.57 & 0.96 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(III) A_3 = \begin{pmatrix} 0.77 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

行列	固有方程式	固有値
A_1	$x^2 - x - 0.81 = 0$	$\begin{cases} x_1 = -0.529563 \\ x_2 = 1.52956 \end{cases}$
A_2	$x^2 + 1.57x + 0.96 = 0$	$\begin{cases} x_1 = -0.785 - 0.586323i \\ x_2 = -0.785 + 0.586323i \end{cases}$
A_3	$x^2 - 0.77x + 1 = 0$	$\begin{cases} x_1 = 0.385 - 0.922917i \\ x_2 = 0.385 + 0.922917i \end{cases}$

□ 1 次変換を表わす行列 $A_1 \sim A_3$ の (1,1) 成分 a の数値的根拠を以下に記す。(1,2) 成分の b を固定したとき、 a による x_n の値の変化を (II) の漸化式において調べると次の図を得る。

【ある a の値において存在した x_n の値の図】



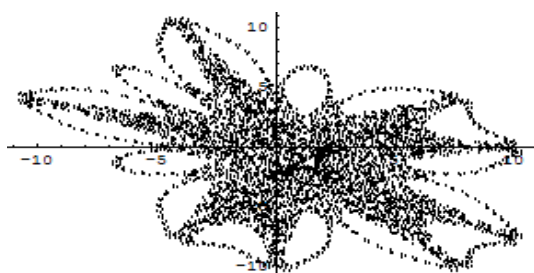
ここで、 x の値のぶれが大きい所 (収束するのではなく、発散するのでもない) の数値に注目することにより a を決定する。

■■ 次に非線形項の部分の (1,1) 成分に $1/f$ ゆらぎが含まれているであろう砂嵐のデータを代入したときの図形の変化を観察する。(上記の各図を参照)

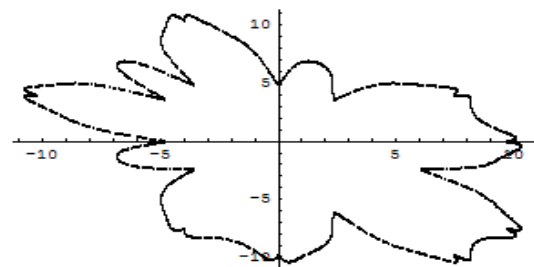
行列	非線形項のデータ代入後の図形の様子
A_1	発散
A_2	原型をとどめつつ微小変化
A_3	原型をとどめつつ微小変化

特に (III) 花びらのような漸化式においては初期値 x_0 の値を変化させていったところ $x_0 = 9.93$ と $x_0 = 9.94$ で大きな変化が見られた。

【 $x_0 = 9.93$ (点の数 6000)】



【 $x_0 = 9.94$ (点の数 6000)】



考察 固有値が虚数である A_2, A_3 を含む

(II), (III) の漸化式が描く図形には何らかの中心のようなものが存在して見えるのに対して、固有値が実数である A_1 を含む (I) の漸化式が描く図形にはそのようなものが存在しないように思われる。砂嵐のデータを代入したときの結果の差異は $A_1 \sim A_3$ の固有値の実虚の違いによるものかもしれないが、(I)~(III) の非線形項の (1,1) 成分の分子の x_n の有無の影響が大きいと思われる。

(III) 花びらのような漸化式の初期値を $x_0 = 9.94$ のときの図形はゆがんだ楕円のようにも見え (A_3 は楕円を描く), この漸化式が描く図形における 1 次変換を表わす行列の影響を強く受けている良い例といえそうである。

《今後の課題》非線形項を含む列ベクトルの (1,1) 成分の分子の x_n の有無による影響など今回調べられていない成分の影響も調べる必要があるだろう。

【まとめ】

当初、カオスの学習から入りその中から私たちは比較的身の回りの現象に結びつきやすく解析が可能な“フラクタル性”と“ゆらぎ”に注目することになる。メンバーの中に音楽に興味をもつものが多く数学的な理論を味付けにこの分野と融合させた曲作りに夢中になっていく。あるときは理論を度返しにして音楽を追求した時期もあった。やがて、文学の領域や芸術の分野から次々に興味深い対象を見つけるものが現れ、一人一人が課題対象に向かい研究に拍車がかかった。ただ実験をおこない、出てきたデータをどう読むべきか。何を用いてデータをどう解析するのがよいか。結論が先にありきで、データの分析がこじつけにならないよう細心の注意を払う必要性と困難さを痛感した。

その数々の研究テーマの中で、良い結果を得られたものがいくつか出てきた。一つ目は「砂嵐に潜むゆらぎ」、二つ目は地道な作業であったがねばり強く解析しジップの法則に近い結果を出した「村上春樹文学の研究」、最後に「巨大メルセンヌ素数と黄金比を用いて作った和音で作った心地よい曲」を、周波数解析し試行錯誤を重ねたが $1/f$ ゆらぎとは結論づけられないが、何故か心にしっくりくる曲が完成した。今後ゆらぎ音楽作りを継続しながらその原因を迫りたいと考えている。興味をもたれた方は、私たちが作成した音楽と数学・物理の融合した曲を収録した CD を聴いてくだされば幸いです。

【おわりに】

見果てぬ結果を手探りで模索する過程は何にも替え難い素敵な冒険 (*A Wild Goose Chase*) であった。今後この研究が映像・音・文字列を用いた予測不可能な変化を安らぎや驚きを伴いながら、セキュリティ一面の向上に応用されると幸いである。

【参考文献】

- ・武者 利光 『ゆらぎの発想』 NHK 出版
- ・寺本 英, 広田 良吾, 武者 利光, 山口 昌哉 『無限・カオス・ゆらぎ』 培風館
- ・芹沢 浩 『カオスの数学』 東京図書
- ・鈴木 晃雄 『カオス入門』 コロナ社
- ・鈴木 いく雄 『Mathematica で学ぶシリーズ』 ; コロナ社
- ・井上 政義 『やさしくわかるカオスと複雑系の科学』 実業出版社
- ・武者 利光 『ゆらぎの科学 1~10』 森北出版
- ・逢澤 明 『複雑な、あまりに複雑な』 現代書館
- ・<http://homepage1.nifty.com/MADIA/>
- ・<http://www1.ocn.ne.jp/~fkingdom/>
- ・<http://ja.wikipedia.org/wiki/>