

1. 統計学が教える 「測定値」について基本的な考え方

真値 測定値

— X — ● ● ● ●

- 上のような1セットの測定結果 (標本の大きさ^{*1} N = 4) だけで、真値は絶対に分からない。
- 同様な測定 (N = 4) をやれば、違う結果が得られるはず。

↓ しか

- 真値は、測定結果の辺りにあるはずだ。
- 「この辺りに真値があるはず」を、他者と共有する理論 (約束事) が欲しい。

「測定値を眺めていても、真値が分からないので、誤差を考えることができない」

↓ ならば (逆転の発想)

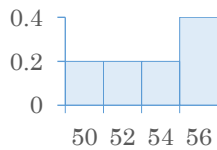
真値を分かっていることにして、偶然によって測定値にどのようにばらつきができるのか、確率 (理論) 的に分布を作っておこう。 この確率分布を使えば、測定値のばらつきから「真値がどの辺りにあるか」を推測できるはず。

2. 標本分布 と 確率分布 — 測定値の分布を統計的に考えるための準備

1) 測定値の分布 (標本分布)

ある物体の長さを5回測定したとき、測定値 (mm) — 54, 56, 56, 52, 50 — が得られたとしよう。これを標本と呼び、標本の分布を理解するための手段として、相対度数分布表やヒストグラム、平均 \bar{X} 、分散 S^2 ^{*2}などを使います。

測定値 (mm)	50	52	54	56	計
相対度数	0.2	0.2	0.2	0.4	1

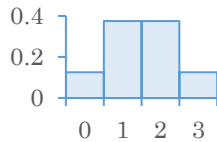


平均 $\bar{X} = 50 \times 0.2 + 52 \times 0.2 + 54 \times 0.2 + 56 \times 0.4 = 53.6(\text{mm})$
 分散 $S^2 = (50-53.6)^2 \times 0.2 + (52-53.6)^2 \times 0.2 + (54-53.6)^2 \times 0.2 + (56-53.6)^2 \times 0.4 = 5.44(\text{mm}^2)$

2) 確率分布

一方、推測統計学は、確率モデルとして、確率分布と呼ぶ関数を考えます。確率分布とは、確率変数 X と確率 P{X} の関係を定めたものです。例で示します。コインを3回投げて表の出る回数を確率変数としたときの確率分布は、次のように表されます。

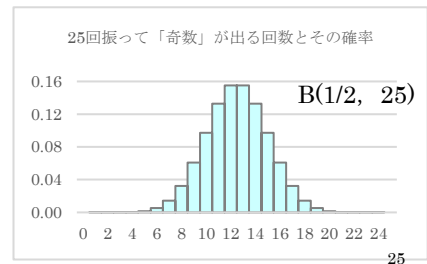
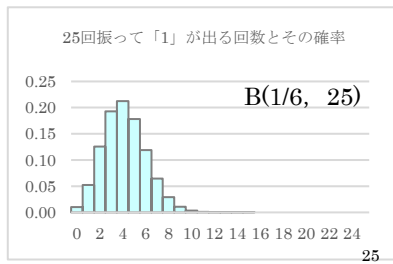
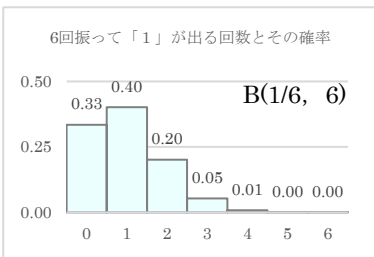
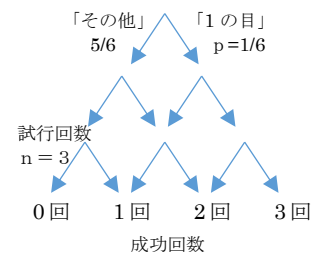
確率変数 x	0	1	2	3	計
確率 P(X)	1/8	3/8	3/8	1/8	1



平均 $\mu = 0 \times (1/8) + 1 \times (3/8) + 2 \times (3/8) + 3 \times (1/8) = 1.5$
 分散 $\sigma^2 = (0-1.5)^2 \times (1/8) + (1-1.5)^2 \times (3/8) + (2-1.5)^2 \times (3/8) + (3-1.5)^2 \times (1/8) = 0.75$ ^{*2}

3. 二項分布 B(p, n) — 離散型確率変数をとる確率分布の代表

サイコロ振りの試行を繰り返すときの、ある目の出る回数 (成功回数) を調べることを考えます。1回の試行における、ある目の出る確率 (成功確率 p) と試行回数 n が決まれば、理論的に成功回数に対する確率 P{X} を求めることができます。これを二項分布 B (p, n) と呼びます。二項分布は、政党支持率・薬の効果が見られた人の割合など身近な現象と関連する確率分布で、離散型確率変数をとる確率分布の代表です。



➤ 二項分布 (binomial distribution) は、成功確率 p と試行回数 n によって決まる。試行回数が多くなるにつれて、グラフはなめらかになるとともに、左右対称な形に近づいていく。

【演習 1】 二項分布で、ある条件の確率を求める

サイコロを 6 回振って「1」が出る回数を数える実験を 100 回行う。このとき、「1」が出る回数が 1 回以下となるのは何回になると期待されるか。前頁の $B(1/6, 6)$ のグラフに示した確率 $P\{0\}$ および $P\{1\}$ を用いて、計算せよ。

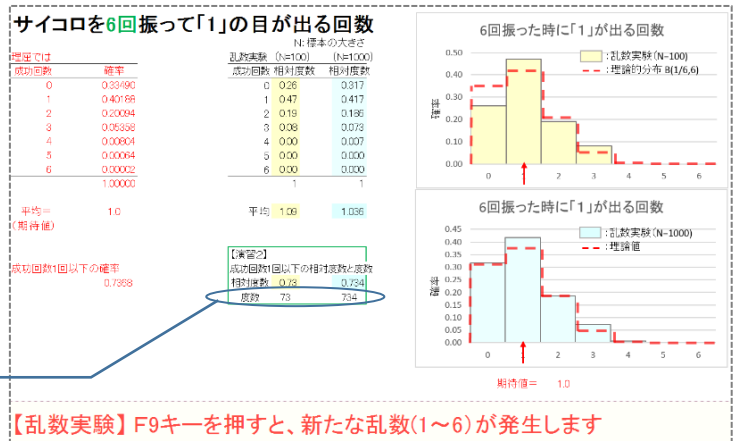
➤ 二項分布はヒストグラムで表され、横軸が成功回数 X 、各柱の面積が各成功回数に対する確率 $P(X)$ です。すべての柱を合わせた面積は、必ず 1 になります。※3

【演習 2】 実験回数を増やすと標本分布はどうか … エクセル「二項分布 (乱数実験) — 1 の目の回数」を使用

乱数実験により、サイコロを 6 回振って「1」が出る回数を数える実験を、100 回 (もしくは 1000 回) 行う。

「1」が出る回数が 1 回以下となるのは 100 回中 (もしくは 1000 回中) 何回か、調べよ。

このセルに実験結果が表示されます

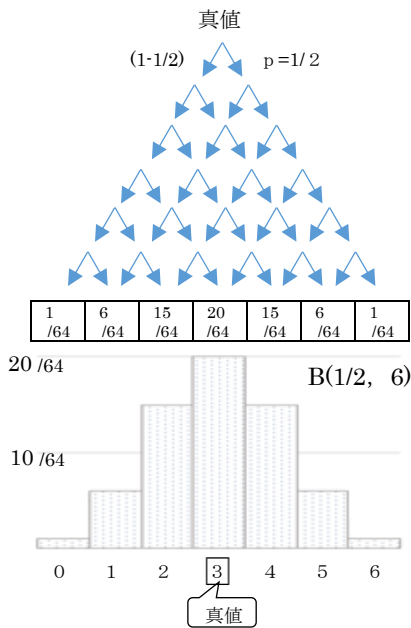


実験 (N=100)		実験 (N=1000)	
B(1/6, 6)から求めた理論値	73.7 回 ※3	736.8 回 ※3	
乱数実験から得た度数 その1			
” その2			
” その3			

➤ 実験回数を多く (標本を大きく) すれば標本分布 (相対度数分布) は、確率分布に近づきます。(エクセルを使った実験で、N=100 で得られた測定値の分布より、N=1000 の分布の方が、確率分布 (二項分布) に近いことが多いことを確かめて下さい。)

※1 「標本の大きさ (サンプルサイズ)」と「標本数 (サンプル数)」を混乱しないように。このような測定 (N=4) を 3 回行ったとすれば、標本の大きさ=4、標本数=3 といいます。つまり、標本とはデータの集団を表す言葉です。
 ※2 標本分布に関する値には英語の文字 (\bar{X} , S^2 など)、確率分布に関する値にはギリシャ文字 (μ , σ^2 など) が用いられる。
 ※3 p_1 の $B(1/6, 6)$ のグラフで各確率を足すと 0.99 ですが、これは数値を丸めている (四捨五入している) ためです。また、演習 1 で求める値 (N=100 のときの理論値) が 73 回で、演習 2 の N=100 のときの理論値が 73.7 であるのも、このためです。

4. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ — 連続型確率変数をとる確率分布の代表 偶然による誤差を考えることで生まれた確率分布

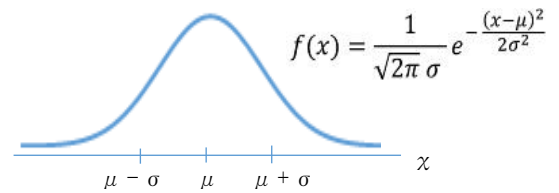


真値から偶然によってばらつきが生じる様子を、成功確率 $p = 1/2$ の二項分布と考えてみます。例えば、左図のように 6 回の試行を行う二項分布 $B(1/2, 6)$ は、左下の表やヒストグラムで示されます。

成功確率 $p = 1/2$ の二項分布は、左右対称で一山（単峰性）の分布であり、山裾がなだらかに広がる形をしています。

ここでは、このヒストグラムの横軸（つまり、確率変数 x ）の中央=3 を真値として実験を行うと、偶然によるばらつきによって、測定値が 0~6 の値となったと考えています。横軸の値は、任意に決めて良いことを、確認しておいてください。つまり、真値を 10 とし、真値から 1 つ分ずれる量を 0.5 にすれば、測定値は 8.5~11.5 とできます。

この二項分布を滑らか（連続的）にした確率分布が右の「正規分布」(normal distribution) です。

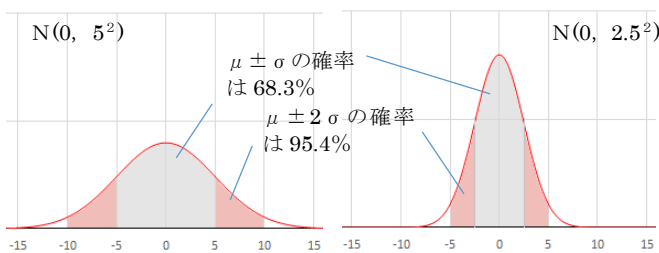


正規分布は、連続型の確率変数 X をとります。この曲線の形は確率密度関数 $f(x)$ （右上図中の式）で示されます。安心して下さい。統計ユーザーはこの式の意味が分からなくても大丈夫です※4。しかし、ここでは少し頑張って、この式に、確率変数 x の他、平均 μ と標準偏差 σ （もしくは分散 σ^2 ）が入っていることを見ておきましょう。つまり、正規分布の形は平均 μ と分散 σ^2 で決まることを意味しており、正規分布は $N(\mu, \sigma^2)$ と表わされます※5。

正規分布の平均 μ は、グラフの左右対称性から分かるように、分布の中央に位置します。また、標準偏差 σ は、分布のばらつきを示すもので、 σ が大きくなれば分布（グラフ）の形は横長で背が低くなります。

正規分布の確率について、重要な性質を説明します。すべての「連続型の確率変数 X をとる確率分布」は、区間 $a < X < b$ で囲まれる面積によってその確率 $P\{a < X < b\}$ が示されます。これを区間確率といいます。

そして正規分布では、区間 $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$ の面積（確率）は全面積の約 68.3%、区間 $\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma$ の面積（確率）は全面積の約 95.4% という風に、平均 μ から標準偏差 σ の何倍まで離れた区間をとるかで、その確率が決まっているのです。



ここで、p1 で取り上げた測定値の誤差の話に戻ります。真値は知りえないので、誤差を考えられない。そこで、真値を分かっていることにして、測定値が偶然でどうばらつくのかを、確率（理論）的に求めておこう。そうして、求められたのが「正規分布」です。

正規分布において、平均 μ は真値を、確率変数 X が測定値を、その差 $|\mu - X|$ が誤差を意味します。

- 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ は、測定値 X が偶然により真値 μ からばらつく様を、理論的に教えてくれる。 ※6
 正規分布に関する言葉（確率変数、平均）と測定に関する言葉（測定値、真値）には、次の対応がある。
 ⇒ X : 確率変数, 測定値 , μ : 平均, 真値
- 正規分布の標準偏差 σ は、測定値が真値からどれくらいばらつきやすいのかを、教えてくれる。 ※6
 ⇒ X (測定値) が、 μ (真値) から $\pm \sigma$ の範囲に入る確率 = 68.3% など

※4 統計ユーザーに必要なのは、横軸「確率変数」とグラフで囲まれる面積「確率」の関係で、それは p5 の表や PC で知ることができます。
 ※5 $f(x)$ の中の $\pi = 3.14\dots$ 、 $e = 2.71\dots$ は定数です。 μ や σ^2 はパラメータと呼ばれます。慣れ親しんだ一次関数 $y = a x + b$ の a や b も、二項分布 $B(p, n)$ の p や n もパラメータです。グラフの形は、パラメータで決まります。
 ※6 μ や σ を分かっているものとして議論していますが、これらを測定値（標本）から求められないことは、もう一度確認しておこう。

4. 不偏推定値 - 母集団の特性値（母平均，母分散，母標準偏差など）を標本から推定する

μ や σ^2 の推定値を標本から得る場合，最も良いと考えられるのは，出来るだけ大きな標本をとって，その平均や標準偏差を推定値に用いることです。しかし，例えば標本の大きさ^{*1} $N=1000$ の測定は，時間や労力からも現実的ではないことが多いです。高校生が行う多くの実験で得る標本の大きさは，3~10 程度のはずです。

このように小さな標本から求める（推定する）平均や分散は，標本抽出（実験）を行うたびに異なり，信用できません。しかし，推定する手がかりは標本以外にはないので，これを使うのですが，統計学者はこれらの推定値が少なくとも“偏り”があってはならない（“ばらつき”があっても仕方がない）と考え，小さな標本から得る不偏推定値^{*7}の計算式を理論的に検討しました。それは次のようなものです。この式について，乱数実験で確かめよう。

標本 (x_1, x_2, \dots, x_n) としたときの不偏推定値 ※ 分散の式で、(n-1) で割っている点に注意！

μ の不偏推定値： 標本平均 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

σ^2 の不偏推定値： 不偏分散 $u^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}$

σ の不偏推定値： 不偏標準偏差 $u = \sqrt{u^2}$

注) 事前プリントでは，不偏分散・不偏標準偏差の記号を s^2 や s としましたが，ここでは u^2 や u を使っています

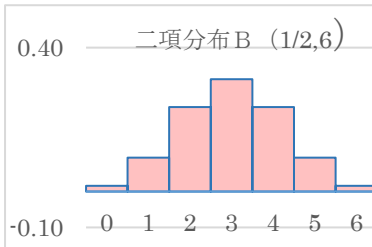
【演習3】 不偏平均・不偏分散 … エクセル「二項分布（乱数実験）—標本の平均・分散」を使用

正規分布の代わりに二項分布（1/2, 6）を用いる。ここから標本（ $N=10$ ）を得る乱数実験を 1000 回行う。 μ や σ^2 の不偏推定値として，標本平均 \bar{x} や不偏分散 u^2 がどの程度使える値かを，経験的に確かめよう。

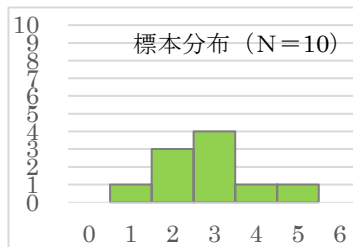
【演習3】 標本の大きさ=10, 標本数=1000

	試行No.	実験1	実験2	実験3	実験4																		
<p>二項分布B(1/2,6)の平均 $\mu = 3.0$</p> <p>二項分布B(1/2,6)の分散 $\sigma^2 = 1.5$</p> <p>二項分布B(1/2,6)の標準偏差 1.225</p>	<p>実験1~1000の平均 標本平均の期待値：標本数=1000 = 3.02</p> <p>標本分散s^2 (Nで割った)の期待値：標本数=1000 = 1.36</p> <p>不偏分散u^2 (N-1で割った)の期待値：標本数=1000 = 1.51</p> <p>不偏標準偏差u (不偏分散の平方根)の期待値：標本数=1000 = 1.20</p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>標本平均</td><td>3.30</td><td>2.90</td><td>2.90</td><td>3.30</td></tr> <tr><td>標本分散(Nで割った)</td><td>0.81</td><td>0.89</td><td>0.69</td><td>2.41</td></tr> <tr><td>不偏分散(N-1で割った)</td><td>0.90</td><td>0.99</td><td>0.77</td><td>2.68</td></tr> <tr><td>不偏標準偏差(不偏分散の平方根)</td><td>0.95</td><td>0.99</td><td>0.88</td><td>1.64</td></tr> </table>	標本平均	3.30	2.90	2.90	3.30	標本分散(Nで割った)	0.81	0.89	0.69	2.41	不偏分散(N-1で割った)	0.90	0.99	0.77	2.68	不偏標準偏差(不偏分散の平方根)	0.95	0.99	0.88	1.64	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: auto;"> この結果を記録しよう </div>
標本平均	3.30	2.90	2.90	3.30																			
標本分散(Nで割った)	0.81	0.89	0.69	2.41																			
不偏分散(N-1で割った)	0.90	0.99	0.77	2.68																			
不偏標準偏差(不偏分散の平方根)	0.95	0.99	0.88	1.64																			

<理論分布> — 標本抽出 —



<ある実験で得た標本分布>



図の標本分布から求めた推定値

$$\bar{x} = (1+2 \times 3+3 \times 4+4+5)/10 = 2.8$$

$$s^2 = (1.8^2+0.8^2 \times 3+0.2^2 \times 4+1.2^2+2.2^2)/10 = 1.2$$

$$u^2 = (1.8^2+0.8^2 \times 3+0.2^2 \times 4+1.2^2+2.2^2)/9 = 1.3$$

平均	$\mu = 3.0$
分散	$\sigma^2 = 1.5$

推定値	実験1	実験2	実験3	実験4		実1~1000の平均
標本平均 \bar{x}					...	
標本分散 s^2					...	
不偏分散 u^2					...	

- 不偏推定値として妥当かどうかを判定するには，多くの実験を行いその推定値の平均（期待値）が理論値と十分に近いことを確かめれば良い。⇒ 平均の不偏推定値としては標本平均 \bar{x} ，分散の不偏推定値としては不偏分散 u^2 が妥当。
- 1回1回の実験（小さな標本）から得た推定値には，ばらつきがある。標本分散や普遍分散のばらつきは，標本平均に比べて非常に大きいことは，見ておこう。

【演習 4】 エクセルで標準偏差を求めるときの 2 種類の関数

エクセルで標準偏差 (standard deviation) を求める関数には、次の 2 つがあります。
 どちらが不偏標準偏差の関数でしょうか？ 説明文を参考に考えてみよう。

STDEV.P 関数：引数を母集団 (population) 全体であると見なして、母集団の標準偏差を返します。
 STDEV.S 関数：引数を標本 (sample) と見なし、標本に基づいて母集団の標準偏差の推定値を返します。

5. 大数の法則

標本が十分に大きければ、標本の分布から母集団の分布を推定することは可能です。これを「大数の法則」と呼びます。

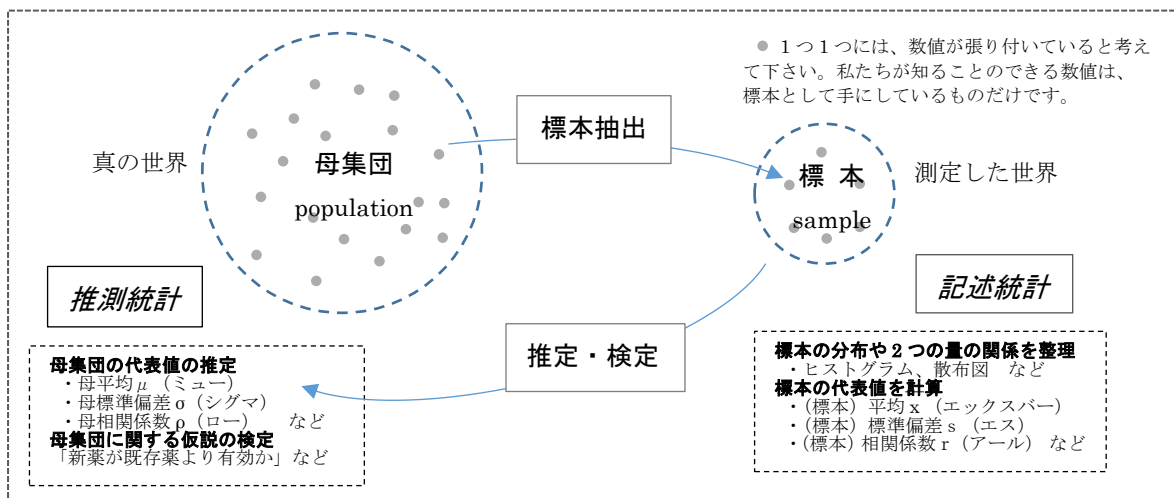
【演習 5】 大数の法則 …エクセル「大数の法則・中心極限定理 (乱数実験)」を使用

左のような母集団から、標本の大きさを $N=10$, $N=100$, $N=1000$, $N=10000$ と変えて、無作為に抽出したとき、標本の分布がどのようになるのかを確かめよう。



6. 推測統計

ここからは、推測統計の基礎の基礎を学びます。標本が小さいときには、母集団の特性値 (母平均など) を推定する際に、正規分布や t 分布などの確率分布を用いて、推定値がどの程度の確からしさ (確率) なのかを表現します。確率分布の役割や推定値の表し方などに注目して、学習してください。

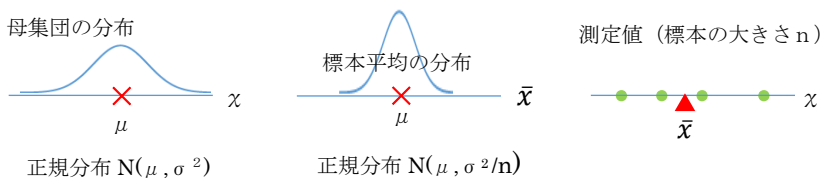


1) 正規分布である母集団の母平均を標本平均から推定する

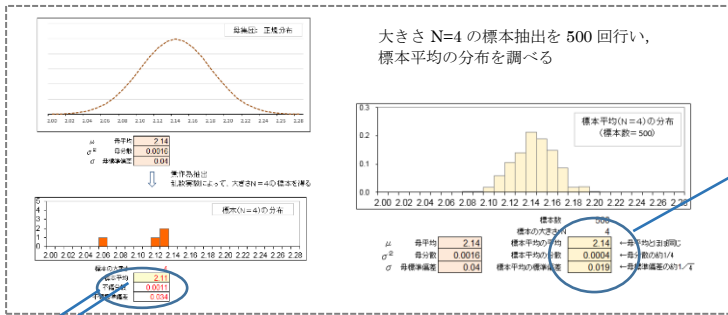
定理 1 (正規分布に従う母集団から得た標本平均に関する定理) → 【演習 6】 で確かめよう

x が平均 μ , 分散 σ^2 (標準偏差 σ) の正規分布に従うならば、大きさ n の無作為標本に基づく標本平均 \bar{X} は、平均 μ , 分散 σ^2/n (標準偏差 σ/\sqrt{n} ※) の正規分布に近づく。

※ この標準偏差 σ/\sqrt{n} を「標本平均 \bar{x} の標準誤差」という。



【演習 6】正規母集団の平均 μ を標本平均から推定する（定理 1）…エクセル「正規母集団からの抽出実験」を使用



1) 乱数実験で、定理 1 が成り立つことを確かめよ

標本の大きさ N	4
標本平均の平均	
標本平均の分散	
標本平均の標準偏差	

母平均 $\mu = 2.14$
とほぼ同じ

母分散 $\sigma = 0.0016$
のおよそ 1/N

2) 母分散 = 0.0016 (母標準偏差 $\sigma = 0.04$) であることが分かっているとして、得られた標本平均から母正規分布の平均 μ を、信頼度 95% で区間推定せよ。ただし、正規分布において区間 $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ の区間確率は 0.95 であるとする。

標本平均 \bar{x}	
標本平均の分布の分散 (定理 1 を使って計算)	

答

【演習 7】正規母集団の平均 μ を、t 分布を用いて推定する（母標準偏差が未知の場合）

【演習 6】2) のように母分散（母標準偏差）が既知でなければ、“標本平均の分布の分散” を求めることは出来ない。この場合は、t 分布を用いて推定する。ただし、t 分布は標本の大きさ n ごとに定まり、n = 4 の t 分布において区間 $(-3.2 < t < 3.2)$ の区間確率は 0.95 であるとする。

t 値は $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n}$ と定義されるので、推定する母平均は $\mu = \bar{x} - t \frac{s}{\sqrt{n}}$ となる。

標本の大きさ	
標本平均 \bar{x}	
不偏標準偏差 s	

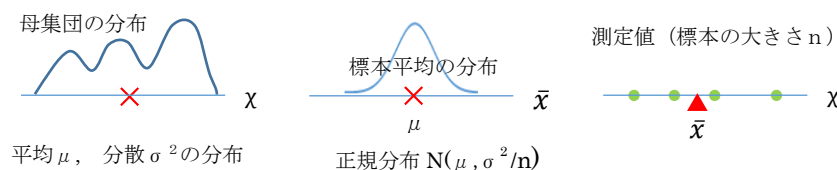
答

2) 定理 2 「母集団が正規分布でなくとも成り立つ標本平均の分布」(中心極限定理)

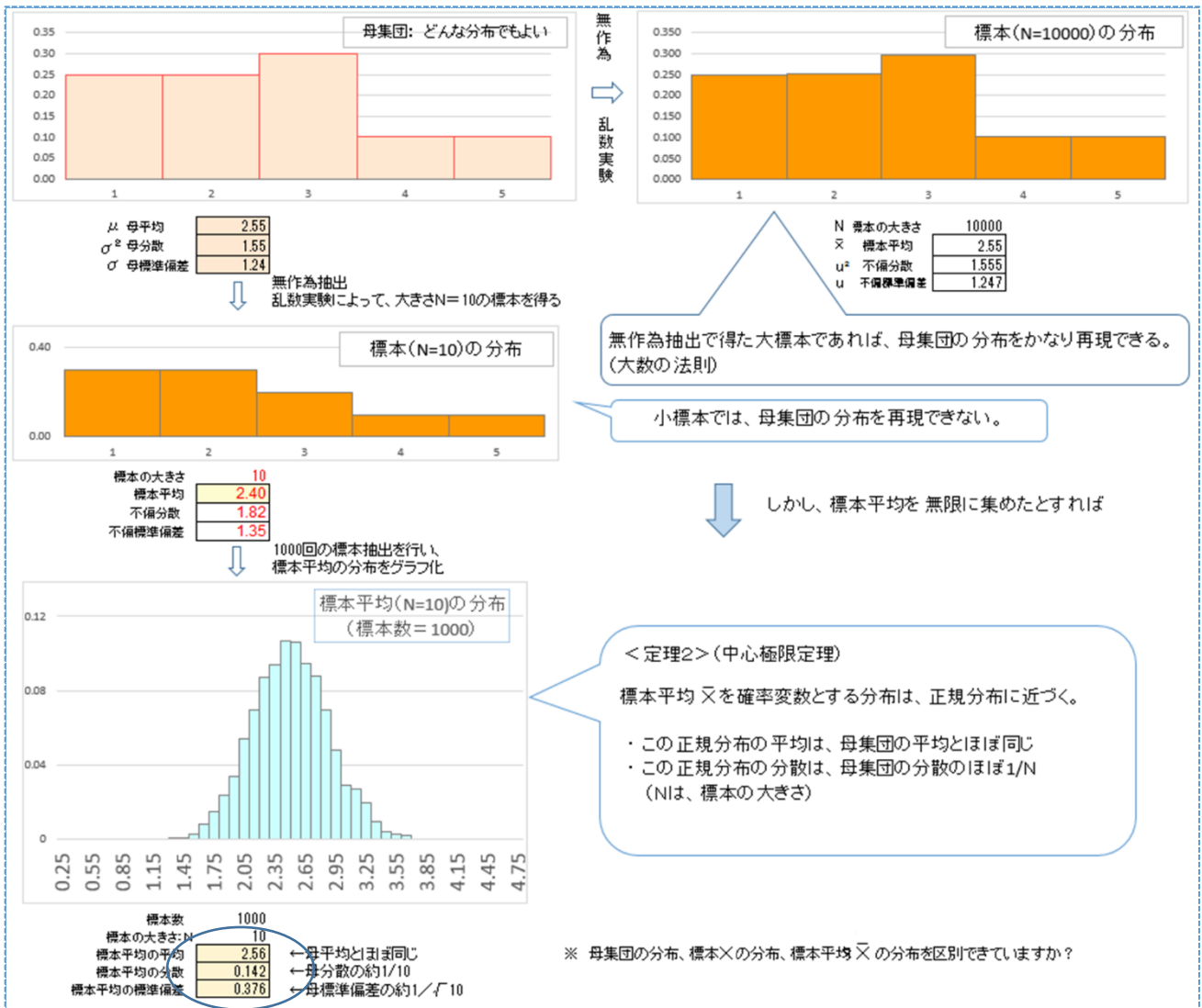
一方、生物学や社会学の対象は、正規分布が期待できない分布をもった母集団であることが多く、研究者はその分布全体を知りたいと思うでしょう。無作為抽出（ランダムサンプリング）によって大標本をとれば、母集団の分布全体を凡そ知ることができます（これを「大数の法則」と呼びますが）、小さな標本（少ない測定）で分布全体を知ることはできません。しかし、分布全体を知らなくとも、母平均を知ることに一定の意味があるはずで、そして、母平均の推定値である標本平均の分布について、下の定理が成り立ちます。

定理 2 (中心極限定理) → 【演習 8】で確かめよう

x が平均 μ 、分散 σ^2 (標準偏差 σ) のある分布 —どんな分布でもよい— に従うならば、大きさ n の無作為標本に基づく標本平均 \bar{X} は、n が無限に大きくなる時、平均 μ 、分散 σ^2/n (標準偏差 σ/\sqrt{n}) の正規分布に近づく。



【演習 8】 定理 2（中心極限定理）を乱数実験で確かめる … エクセル「大数の法則・中心極限定理」を使用



乱数実験で定理 2（中心極限定理）が成り立つことを確かめよ。

標本平均	
分散	
標準偏差	

☆ 演習の解答と解説

【演習 1】

解答： $(0.33+0.40) \times 100 = 73$ 回

解説： 二項分布は、横軸が離散型確率変数であり、各確率変数における確率がヒストグラムの柱の面積で示されています。

【演習 2】 解答例：(乱数実験ですので、結果は毎回変わります)

実験 (N=100)		実験 (N=1000)
B(1/6, 6)から求めた理論値	73.7 回 ※4	736.8 回
乱数実験から得た回数 その1	78	720
〃 その2	73	765
〃 その3	74	724

解説： 標本の大きさが大きいほど、標本分布は元の分布に近くなりやすいはずですが、上の解答例で、それぞれ平均を求めると、N=100の実験では75、N=1000では736.3であり、標本が大きくなると理論値に近づいています。ただし、3回ぐらいの平均での比較では、逆になることもあり得ます。

【演習 3】 解答例：(乱数実験ですので、結果は毎回変わります)

平均	$\mu = 3.0$	推定値	実験1	実験2	実験3	実験4	...	実1~1000の平均
分散	$\sigma^2 = 1.5$	標本平均 \bar{x}	3.30	2.90	2.90	3.30	...	3.02
		標本分散 s^2	0.81	0.89	0.69	2.41	...	1.36
		不偏分散 u^2	0.95	0.99	0.88	2.68	...	1.51

解説： 1回1回の実験結果にはばらつきがありますが、その平均をとることで、実験による推定値が妥当であるかを判断できます。平均の推定値は標本平均、分散の推定値は不偏分散 (n-1で割った分散) が妥当と言えます。

【演習 4】 解答：STDEV.S 関数 (STDEV.P 関数は、標本の大きさ (データ数) nで割った標本標準偏差)

【演習 5】 解説： 標本の大きさが10や100では、標本分布が母集団分布を反映していないことが多い。

【演習 6】 1) 解答例：(乱数実験ですので、結果は毎回変わります)

標本の大きさ N	4
標本平均の平均	2.14
標本平均の分散	0.0004
標本平均の標準偏差	0.019

解説： 確かめて欲しいことは、次の3つです。

- ① 標本平均の分布は、正規分布となる
- ② 「標本平均の平均」は、「母集団の平均」(2.14) とほぼ一致している
- ③ 「標本平均の分散」は「母分散」(0.0016) の1/N倍(0.0004)に近い
(「標本平均の標準偏差」は「母標準偏差」(0.04) の1/√N倍(0.02)に近い)

2) 解答例：(乱数実験ですので、結果は毎回変わります)

標本平均 \bar{x}	2.11
標本平均の分布の分散 (定理1を使って計算)	$0.0016/4 = 0.0004$

$\sigma^2 = 0.0004$ であるから、 $\sigma = 0.02$ 。正規分布の性質より、
 $\mu - 2\sigma < \bar{x} < \mu + 2\sigma$, つまり $\bar{x} - 2\sigma < \mu < \bar{x} + 2\sigma$ の範囲にある確率が
0.95 であるから、求める範囲は $2.09 < \mu < 2.13$

※ 真値(2.14)から外れました。信頼度95%の推定ですから、5%で推定ミスが起こります。

【演習 7】 解答例：(乱数実験ですので、結果は毎回変わります)

標本の大きさ N	4
標本平均 \bar{x}	2.11
不変標準偏差 s	0.034

区間確率0.95 である範囲は $-3.2 < t < 3.2$ であるから、求める μ の範囲は
 $\bar{x} - 3.2 \times (s/\sqrt{N}) < \mu < \bar{x} + 3.2 \times (s/\sqrt{N})$
 $2.11 - 3.2 \times (0.034/2) < \mu < 2.11 + 3.2 \times (0.034/2)$
 $2.06 < \mu < 2.16$

【演習 8】 解答例：(乱数実験ですので、結果は毎回変わります)

標本平均	2.56
分散	0.142
標準偏差	0.376

解説： 確かめて欲しいことは、次の3つです。

- ① 母集団がどんな分布でも、標本平均の分布は正規分布となる
- ② 「標本平均の平均」は、「母集団の分布の平均」(2.55) とほぼ一致している
- ③ 「標本平均の分散」は「母分散」の1/N倍 ($1.55/10 = 0.155$) に近い
(「標本平均の標準偏差」は「母標準偏差」の1/√N倍 ($1.24/\sqrt{10} = 0.392$) に近い)